Analiza matematyczna 1

lista zadań 9

1. Wyznacz granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2^x+1)}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$.

2. Znajdź ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$, (c) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$, (e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$,

(b) $f(x) = |x^3 - 30x^2 + 225x|$, (d) $f(x) = xe^{-3x}$, (f) $f(x) = x(\ln x)^2$.

3. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$ oraz $g(x) = (x^2-1)e^{-x^2}$.

4. Koszt wykonania metra kwadratowego podstawy (dolnej lub górnej) pojemnika o kształcie walca to 1 zł. Koszt metra kwadratowego powierzchni bocznej wynosi 2 zł. Zaprojektuj najtańszy pojemnik o kształcie walca, który ma objętość 8π.

5. Prostokątne pole o powierzchni 1 ma przylegać do rzeki. Jakie powinny być jego wymiary, by koszt ogrodzenia był możliwie najmniejszy? Oczywiście pola nie trzeba ogradzać od strony rzeki.

6. Dla jakiej miary kąta przy wierzchołku A trójkąta równoramiennego ABC ($|AB| = |AC|$) o polu 1 promień okręgu wpisanego w to koło jest największy? Wskazówka: pole trójkąta to połowa jego obwodu razy promień okręgu weń wpisanego.

7. Uzasadnij nierówności:

(a) $e^x \geq 1 + x$; (b) $\ln x >= \dfrac{x-1}{x}$; (c) $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)' > 0$ $(x > 0)$.

8. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji $f(x)$ wokół punktu x_0 z n-tą resztą, oblicz przybliżoną wartość $f(x)$, jeśli

   (a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 2, 3$;
   (b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 2, 3$;
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x = \frac{99}{100}$, $n = 2, 3$;

   Oszacuj błąd przybliżenia (poprzez oszacowanie reszty).

9. Udowodnij, że dla $x \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right),$$
$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

10. Udowodnij, że dla $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ zachodzi

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}\right).$$

(W istocie wzór ten zachodzi dla $x \in (0, 2]$, ale wymaga to znajomości innej postaci reszty we wzorze Taylora.)

Mateusz Kwaśnicki