Analiza matematyczna 1

zadanie domowe nr 10

1. *Rekurencje liniowe — część II.*

   (a) Czy są ciągi geometryczne, spełniające równanie rekurencyjne $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$? Poszukaj wśród ciągów o wartościach zespolonych!

   (b) Rozwikłaj rekurencję $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$.

   (c) Zapisz liczby $1 + i$ oraz $1 - i$ w postaci trygonometrycznej i w ten sposób wyraź rozwiązanie poprzedniego podpunktu bez użycia liczb zespolonych.

2. *Rekurencje liniowe — część III.*

   (a) Czy są ciągi geometryczne, spełniające równanie rekurencyjne $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$?

   (b) Rozwikłaj rekurencję $a_0 = 4$, $a_1 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

   (c) Czy umiesz rozwikłać rekurencję $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$? Z pomocą przyjdzie ciąg o wyrazach $n2^n$ — sprawdź, że spełnia on równanie rekurencyjne rozważane w tym zadaniu!

3. *Rekurencje liniowe — podsumowanie.* Przeczytaj poniższy tekst i uzasadnij, że podanych ciągów jest faktycznie k.

   Metoda rozwikływania ogólnych rekurencji liniowych jest następująca. Rozważmy ogólne liniowe równanie rekurencyjne głębokości k:

   $$a_{n+k} = p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_{k-1} a_{n+1} + p_k a_n.$$

   Wielomian

   $$P(x) = x^k - p_1 x^{k-1} - p_2 x^{k-2} - \ldots - p_{k-1} x - p_k$$

   nazywany jest *wielomianem charakterystycznym* równania rekurencyjnego. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_N$ będą wszystkimi pierwiastkami zespolonymi wielomianu P, niech ponadto M_j oznacza krotność pierwiastka x_j ($j = 1, 2, \ldots, N$). Wówczas k ciągów postaci

   $$a_n = n^m x_j^n, \qquad \text{gdzie } j \in \{1, 2, \ldots, N\} \text{ oraz } m \in \{0, 1, \ldots, M_j - 1\},$$

   spełnia rozważane równanie rekurencyjne. Biorąc ich *kombinację liniową* (tj. sumę z odpowiednimi współczynnikami) i porównując z zadanymi wartościami początkowych k wyrazów, otrzymamy ciąg spełniający zadany układ równań rekurencji liniowej.

   Do tematu powrócimy na koniec semestru!

Mateusz Kwaśnicki