

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

ZADANIE DOMOWE NR 2

1. Korzystając ze wzoru $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$, oblicz $\cos \frac{\pi}{8}$ i $\cos \frac{\pi}{12}$.

2. Podaj przykłady funkcji elementarnych o następujących dziedzinach:

- (a) $[-1, 1]$, (b) $(-1, 1)$, (c) $[0, 1] \cup [2, 3]$,
(d) $(0, 1) \cup (2, 3)$, (e) $[0, 1] \cup (2, 3)$, (f) $[0, 1) \cup (2, 3]$.

3. Na wykładzie wprowadzono funkcję *podłoga*: $\lfloor x \rfloor$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x . Analogicznie oczywiście definiuje się *sufit*: $\lceil x \rceil$ jest najmniejszą liczbą całkowitą nie mniejszą od x . Narysuj wykresy funkcji zmiennej x danych wzorami: $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil$, $x - \lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil - x$. Uzasadnij, że $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ oraz że $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

4. Niech $f(x) = x^x$, $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

- (a) Znajdź dziedziny funkcji f i g .
(b) Zapisz wzorem $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$ i $g(g(x))$.
(c) Jakie są dziedziny tych złożień?

Odpowiedzi:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. Na przykład: (a) $\sqrt{-(x+1)(x-1)}$, (b) $\sqrt{-(x+1)(x-1)}$, (c) $\sqrt{-(x-1)(x-2)(x-3)}$,
(d) $\sqrt{\frac{1}{(x-2)(x-2)(x-3)}}$, (e) $\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}$, (f) $\sqrt{\frac{x(x-3)}{(x+1)(x-2)}}$

4. (a) $D(f) = (0, \infty) \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$, $D(g) = (0, \infty) \cup \{-1\}$, (b) x^{x^x} , $x^{x^{\frac{1}{x}}}$, $x^{\frac{1}{x^x}}$, $x^{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}}$,
(c) odpowiednio: $(0, \infty) \cup \{-1\} \cup \{-2, -3, -4, \dots\}$, $(0, \infty) \cup \{-1\}$, $(0, \infty) \cup \{-1\} \cup \{-2, -3, -4, \dots\}$,
 $(0, \infty) \cup \{-1\}$.