

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

ZADANIE DOMOWE NR 3

1. Narysuj wykresy funkcji $\sin(\arcsin x)$, $\arcsin(\sin x)$.
2. Wyraż $\sin t$ oraz $\cos t$ za pomocą $\operatorname{tg} t$.¹ Czy można to zrobić jednoznacznie? Zapisz w prostszy sposób $\sin(\operatorname{arctg} x)$ oraz $\cos(\operatorname{arctg} x)$.
3. Uzasadnij, że $\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + (\operatorname{tg} \frac{t}{2})^2}$ oraz $\cos t = \frac{1 - (\operatorname{tg} \frac{t}{2})^2}{1 + (\operatorname{tg} \frac{t}{2})^2}$.¹
4. Podaj przykład funkcji f i g takich, że $f(g(x)) = x$ zachodzi dla każdego x z dziedziny g , ale nie dla wszystkich x z dziedziny f mamy $g(f(x)) = x$.
- 5.* Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = x - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi x)).$$

Jak się ma ta funkcja do $\lfloor x \rfloor$?

- 6.* Udowodnij, że jeśli f i g_1 są funkcjami wzajemnie odwrotnymi oraz f i g_2 są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, to $g_1 = g_2$.
- 7.* Funkcję wymierną f nazywa się *ułamkiem prostym*, jeśli jest:

- (a) *jednomianem*, tj. $f(x) = c \cdot x^n$ dla pewnych $c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;
- (b) *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju*, tj. $f(x) = \frac{c}{(x+b)^n}$ dla pewnych $b, c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; lub
- (c) *ułamkiem prostym drugiego rodzaju*, tj. $f(x) = \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}$ dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, gdzie trójmian $x^2 + ax + b$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zasadnicze twierdzenie algebry (zbyt trudne, by dowód mógł być podany na algebrze) mówi o tym, że każdy wielomian można zapisać w postaci iloczynu funkcji liniowych i trójmianów kwadratowych. Wynika z niego (dowód będzie najprawdopodobniej podany na algebrze), że każdą funkcję wymierną można zapisać w postaci sumy ułamków prostych. Twierdzenie to umożliwi nam w przyszłości podanie algorytmu całkowania funkcji wymiernych.

Zadanie na dziś: zapisz w postaci sumy ułamków prostych funkcję wymierną $\frac{1}{x^4+1}$.

Mateusz Kwaśnicki

¹Te wzory przydadzą się w przyszłości do całkowania