Analiza matematyczna 1

zadanie domowe nr 5

1. Czy w myśl definicji podanej na wykładzie funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest ciągła w punkcie 0?

2. Udowodnij nierówności $|x + y| \leq |x| + |y|$ oraz $|x - y| \geq |x| - |y|$.

3. Uzupełnij szczegóły dowodów twierdzeń z wykładu:

   (a) f jest ciągła w $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

   (b) f posiada rozszerzenie do funkcji ciągłej w $a \iff \lim_{x \to a} f(x)$ istnieje.

   Podaj dokładne założenia tych twierdzeń.

4. Udowodnij, że funkcja f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje } \delta > 0 \text{ taka, że:} \quad (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

5. Udowodnij, że funkcja f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ istnieje } k \in \mathbf{Z}_+ \text{ takie, że:} \quad (|x - a| < \tfrac{1}{k}) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \tfrac{1}{n}).$$

6. Załóżmy, że f i g są ciągłe na przedziale (a, b) i $f(c) = g(c)$ dla pewnego $c \in (a, b)$. Określmy $h(x) = f(x)$ dla $x < c$, $h(x) = g(x)$ dla $x > c$ oraz $h(c) = f(c) = g(c)$. Udowodnij, że h jest ciągła na (a, b) (a zwłaszcza w punkcie c).

7. Zerknij na następną stronę.

8.* *O potęgowaniu.* (A może bardziej *o tym, czym są liczby rzeczywiste*?)

(a) Czy umiesz *ściśle* uzasadnić, że istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest równy 2?

(b) Przypomnij, jak się definiuje potęgę wymierną $a^{\frac{p}{q}}$ ($a > 0$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}_+$).
Czy umiesz *ściśle* uzasadnić, że $a^{\frac{p}{q}}$ istnieje?

(c) Uzasadnij, że jeśli $a > 1$ oraz $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, to $a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{r}{s}}$. Jak jest dla $a \in (0, 1)$?

(d) Niech f będzie funkcją monotoniczną i taką, że $f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$ dla liczb wymiernych $\frac{p}{q}$. Określamy $a^x = f(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.
Czy umiesz uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna funkcja f spełniająca powyższy warunek?

9.* *Nierówności typu Bernoulliego.* Już niedługo takie nierówności to będzie bułka z masłem.

(a) Udowodnij (indukcyjnie) nierówność Bernoulliego: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > -1$, $n = 0, 1, 2, ...$).

(b) Udowodnij, że $(1 + \alpha)^k \leq \dfrac{1}{1 - k\alpha}$ ($-1 < \alpha < \frac{1}{k}$, $k = 0, 1, 2, ...$). Wskazówka: $x = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $n = k + 1$.

(c) Udowodnij, że $(1 + \beta)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{\beta}{n}$ ($\beta > -1$, $n = 0, 1, 2, ...$). Wskazówka: $x = \frac{\beta}{n}$.

10.* *O ciągłości potęgowania.*

(a) Załóżmy, że $p \geq 1$. Jeśli $|g(x) - q| < \frac{1}{m}$, to oczywiście $p^{-\frac{1}{m}} \leq p^{g(x)-q} \leq p^{\frac{1}{m}}$. Wywnioskuj z nierówności Bernoulliego, że

$$\frac{1}{1 + \frac{p-1}{m}} \leq p^{g(x)-q} \leq 1 + \frac{p-1}{m}.$$

Uzasadnij, że jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje m tak duże, że $|p^{g(x)-q} - 1| < \varepsilon$. Wywnioskuj, że w takim razie jeśli $\lim_{x \to a} g(x) = q$, to $\lim_{x \to a} p^{g(x)-q} = 1$. Korzystając z praw arytmetyki granic, uzasadnij analogiczny wzór dla $p \in (0, 1)$ i wywnioskuj, że:

$$\text{jeśli } \lim_{x \to a} g(x) = q, \text{ to } \lim_{x \to a} p^{g(x)} = p^q.$$

(b) Załóżmy, że $q > 0$. Uzasadnij, że jeśli $|f(x) - p| < \frac{1}{m}$, $|g(x) - q| < \frac{1}{m}$, to

$$\left(1 - \tfrac{1}{mp}\right)^{q+1} \leq \left(\tfrac{f(x)}{p}\right)^{g(x)} \leq \left(1 + \tfrac{1}{mp}\right)^{q+1};$$

zakładamy przy tym, że $\frac{1}{m} < q$. Wywnioskuj z nierówności typu Bernoulliego, że jeśli oznaczymy $Q = \lceil q + 1 \rceil$, to

$$\left(1 - \tfrac{Q}{mp}\right) \leq \left(\tfrac{f(x)}{p}\right)^{g(x)} \leq \frac{1}{1 - \frac{Q}{mp}};$$

potrzebne założenia to $\frac{1}{m} < q$, $\frac{Q}{mp} < 1$. Uzasadnij, że jeśli $\varepsilon > 0$, to dla pewnego $m \in \mathbf{Z}_+$ zachodzi $\left|\left(\frac{f(x)}{p}\right)^{g(x)} - 1\right| < \varepsilon$. Wywnioskuj, że gdy $\lim_{x \to a} f(x) = p$, $\lim_{x \to a} g(x) = q > 0$, to $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{p}\right)^{g(x)} = 1$. Korzystając z praw arytmetyki granic, uogólnij ten wynik na przypadek dowolnego $q \in \mathbf{R}$ (wskazówka: dla $q < 0$ jest łatwo; dla $q = 0$ rozważ $g_1(x) = g(x) + 1$ oraz $g_2(x) = 1$ i zapisz $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$), a następnie połącz go z wynikiem z poprzedniego punktu, by uzyskać twierdzenie z wykładu:

$$\text{jeśli } \lim_{x \to a} f(x) = p \text{ oraz } \lim_{x \to a} g(x) = q, \text{ to } \lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = p^q.$$

(c) Odetchnij z ulgą — wkrótce poznamy nowy, lepszy dowód ciągłości potęgowania!

Mateusz Kwaśnicki