Analiza matematyczna 1

zadanie domowe nr 6

1. Udowodnij podany na wykładzie fakt, że $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie granice jednostronne $\lim_{x\to a^-} f(x)$ oraz $\lim_{x\to a^+}$ istnieją i są równe c.

2. Udowodnij, że jeśli $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x)$.

3. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania, uzasadnij szybko, że $\lim_{x\to n^+} \lceil x \rceil = n+1$ dla $n \in \mathbf{Z}$.

4.* Zauważ, że dla $a > 1$ oraz $x \in (-\delta, \delta)$ zachodzi

$$\frac{a^x - 1}{x} \in \left(\frac{a^\delta - 1}{\delta a^\delta}, \frac{a^\delta - 1}{\delta} \right)$$

oraz że długość powyższego przedziału jest równa

$$\frac{(a^\delta - 1)^2}{\delta a^\delta} \, .$$

Udowodnij, że powyższa liczba jest nie większa niż $a^\delta - 1$.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ funkcja wykładnicza jest ciągła, liczba $a^\delta - 1$ jest mniejsza niż ε dla pewnego $\delta > 0$. Jak stąd wywnioskować, że funkcja $(a^x - 1)/x$ ma w zerze granicę? (Porównaj z zadaniem domowym 4.)

Mateusz Kwaśnicki