# Analiza matematyczna 1

zadanie domowe nr 8

1. Uzasadnij (korzystając z definicji i nierówności Bernoulliego), że $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ gdy $a > 1$.

2. Uzasadnij (wprost z definicji), że $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$ gdy $a > 1$.

3. Uzasadnij, że jeśli $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, to istnieje przedział otwarty, który zawiera $a$ i na którym funkcja przyjmuje dodatnie wartości.

4. Piszemy $f \ll g$, jeśli $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{|g(x)|} = 0$. Na wykładzie zostało udowodnione, że $\log_a x \ll x^b \ll c^x$ dla dowolnych $a > 1$, $b > 0$, $c > 1$. Udowodnij, że $c^x \ll x^x$ dla $c > 1$.

5.* (a) Uzasadnij, że jeśli $f \ll g$ i $g \ll h$, to $f \ll h$.
   (b) Uzasadnij, że jeśli $f \ll h$, to istnieje $g$ taka, że $f \ll g \ll h$.
   (c) Uzasadnij, że jeśli $f_1 \ll f_2 \ll f_3 \ll ...$, to istnieje $g$ taka, że $f_n \ll g$ dla wszystkich $n$.
   (d) Uzasadnij, że jeśli $f_1 \ll f_2 \ll f_3 \ll ...$, $... \ll h_3 \ll h_2 \ll h_1$ oraz $f_n \ll h_m$ dla wszystkich $n, m \geq 1$, to istnieje $g$ taka, że $f_n \ll g \ll h_m$ dla wszystkich $n, m \geq 1$.

Mateusz Kwaśnicki