Analiza matematyczna 1

Notatki do wykładu

Mateusz Kwaśnicki

1 Indukcja matematyczna

Przykład 1. Pewnego popołudnia Kubuś Puchatek kupił pustą beczkę, która mieści 20 słoików miodu, i wlał do niej wszystkie swoje zapasy. Co dzień rano Prosiaczek przynosi Kubusiowi nowy słoik miodu, który Kubuś dolewa do beczki (a słoik oddaje Prosiaczkowi). Co dzień wieczorem Kubuś zjada 5% zawartości beczki.

Popołudniami Miś o Bardzo Małym Rozumku zastanawia się, czy kiedyś zabraknie mu miejsca w beczce. Czy umiesz mu pomóc?

Rozwiązanie. W chwili, gdy Kubuś kupił beczkę, miejsca nie brakowało. Jeśli któregoś popłudnia beczka nie jest przepełniona i zawiera x słoików miodu ($x \le 20$), to w nocy jest tam $\frac{95}{100} x$ słoików, a następnego popołudnia — $\frac{95}{100} x + 1$ słoików. Skoro $x \le 20$, to

$$\frac{95}{100} x + 1 \le \frac{95}{100} \cdot 20 + 1 = 19 + 1 = 20,$$

czyli po upływie jednego dnia beczka również nie jest przepełniona. A więc beczka wystarczy na Kubusiowe potrzeby. □

Zastosowany powyżej argument nosi nazwę **indukcji matematycznej**. W skrócie: jeśli pewne twierdzenie: (1) jest prawdziwe pewnego dnia; oraz (2) jest prawdziwe jutro, jeśli jest prawdziwe dzisiaj; to automatycznie jest prawdziwe zawsze (od owego początkowego dnia). Gdy ponumerujemy dni liczbami naturalnymi, otrzymamy następujące zupełnie ścisłe sformułowanie.

Zasada indukcji matematycznej. Jeśli pewne twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej (konkretnej) liczby naturalnej k, oraz dla dowolnego $n \ge k$ z prawdziwości twierdzenia dla liczby n wynika jego prawdziwość dla liczby $n + 1$, to twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych nie mniejszych od k.

Zasadę indukcji matematycznej zwykle uznaje się za aksjomat (czyli zdanie prawdziwe, którego się nie dowodzi) w teorii liczb naturalnych. Przedstawimy teraz kilka ważnych zastosowań.

Przykład 2 (Wieże z Hanoi)**.** Trzy pionowe pręty są przytwierdzone do podłoża. Na lewy nałożone jest jeden na drugim osiem krążków o coraz mniejszych średnicach. Zadanie polega na przeniesieniu wszystkich krążków na prawy pręt przy zachowaniu dwóch zasad: (1) w jednym ruchu wolno przenieść tylko jeden krążek; oraz (2) większy krążek nie może znaleźć się na mniejszym. Ile ruchów jest potrzebnych do przeniesienia całej wieży?

Uwaga. Powyższa łamigłówka została sformułowana przez francuskiego matematyka Edouarda Lucasa w 1883 roku. Za *Matematyką konkretną*:

> *Lucas ubarwił swoje zadanie legendą o znacznie wyższej Wieży Brahmy, która miała mieć* 64 *krążki z czystego złota spoczywające na* 3 *diamentowych igłach. U zarania czasu Bóg umieścił te złote krążki na pierwszej z igieł i polecił grupie mnichów, aby przełożyli je na igłę trzecią zgodnie z podanymi regułami. Mnisi pracują bez wytchnienia dzień i noc. Kiedy skończą, wieża rozsypie się i nastąpi koniec świata.*

Miłośnicy Beskidu Sądeckiego z pewnością zetknęli się z tą łamigłówką w Schronisku na Niemcowej, gdzie znajdują się drewniane wieże z Hanoi z siedmioma piętrami (do nabycia u bazowego!).

Rozwiązanie. W pewnym momencie trzeba przesunąć największy krążek — wówczas cała wieża bez największego krążka musi spoczywać na trzecim, niewykorzystywanym pręcie. Stąd łatwo wywnioskować, że optymalnym rozwiązaniem jest

- przeniesienie całej wieży bez największego krążka na środkowy pręt;
- przeniesienie największego krążka na prawy pręt;
- przeniesienie wieży ze środkowego pręta na prawy.

W ten sposób zredukowaliśmy zadanie do przeniesienia wieży o jeden poziom mniejszej.

Wygląda więc na to, że wygodnie jest utrudnić rozważane zadanie: niech na lewym pręcie spoczywa nie 8, a n krążków. Oznaczmy najmniejszą możliwą liczbę ruchów przez h_n. Zgodnie z powyższą strategią, $h_{n+1} = h_n + 1 + h_n = 2h_n + 1$ i oczywiście $h_1 = 1$. Stąd $h_2 = 3$, $h_3 = 7$ itd.; łatwo policzyć, że $h_8 = 255$. A co z indukcją?

Po chwili namysłu można zgadywać, że $h_n = 2^n - 1$. Jak to udowodnić? Indukcyjnie:

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1;
- jeśli $h_n = 2^n - 1$, to
$$h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdego $n \geq 1$.

W szczególności z powyższego rozumowania wynika, że mnisi z Brahmy będą musieli wykonać aż $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ ruchów. □

Przykład 3. Dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Dowód. Twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1, bowiem
$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego n. Wówczas
$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\big(n\,(2n+1) + 6(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

czyli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n+1$. To kończy dowód na mocy zasady indukcji matematycznej. □

Przykład 4 (wzór dwumianowy Newtona)**.** Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że
$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2\,a\,b + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Można zatem przypuszczać, że

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\,b + \binom{n}{2}a^{n-2}\,b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}\,b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

gdzie $\binom{n}{k}$ są odpowiednimi współczynnikami. Okazuje się, że tak jest w istocie i ponadto

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad\qquad 0 \le k \le n.$$

Przypominamy, że $0! = 1$ oraz $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ dla $n \ge 0$.

Dowód. Dla $n = 0$ twierdzenie jest prawdziwe, bowiem

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0 b^0,$$

choć można mieć wątpliwości, co jeśli $a = 0$, $b = 0$ lub $a + b = 0$. Zacznijmy więc od $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$$

Załóżmy, że wzór dwumianowy Newtona zachodzi dla pewnego n. Wówczas:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,\left(\tbinom{n}{0}a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}\,b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}\,b^2 + \tbinom{n}{3}a^{n-3}\,b^3 + \ldots + \tbinom{n}{n}b^n\right)\\
&= \tbinom{n}{0}a^{n+1} + \tbinom{n}{1}a^n\,b + \tbinom{n}{2}a^{n-1}\,b^2 + \tbinom{n}{3}a^{n-2}\,b^3 + \ldots + \tbinom{n}{n}a\,b^n +\\
&\qquad + \tbinom{n}{0}a^n\,b + \tbinom{n}{1}a^{n-1}\,b^2 + \tbinom{n}{2}a^{n-2}\,b^3 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}a\,b^n + \tbinom{n}{n}b^{n+1}\\
&= \tbinom{n}{0}a^{n+1} + \left(\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}\right)a^n\,b + \left(\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2}\right)a^{n-1}\,b^2 + \ldots + \left(\tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n}\right)a\,b^n + \tbinom{n}{n}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wystarczy teraz sprawdzić, że:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}, \qquad\qquad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1},$$

oraz

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad\qquad 1 \le k \le n, \qquad\qquad (1)$$

i teza wynika z zasady indukcji matematycznej. □

Uwaga. Krócej wzór dwumianowy można zapisać następująco:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k,$$

o ile zgodzimy się **wyjątkowo** przyjąć, że $0^0 = 1$.

Ćwiczenie 1. Zapisać dowód wzoru dwumianowego korzystając z notacji $\sum$.

Ćwiczenie 2. Uzasadnić wzór (1).

Ćwiczenie 3. Wywnioskować ze wzoru dwumianowego, że:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0;$$

Przykład 5. Dla dowolnego $n \geq 1$, ostatnia cyfra zapisu dziesiętnego liczby $15^n + (-9)^n$ to 6.

Dowód. Dla $n = 1$ rozważana liczba to 6, ok. Załóżmy, że $15^n + (-9)^n$ kończy się szóstką. Wyliczamy:

$$\begin{aligned} 15^{n+1} + (-9)^{n+1} &= 15 \cdot 15^n - 9 \cdot (-9)^n \\ &= (15^n + (-9)^n) + 14 \cdot 15^n - 10 \cdot (-9)^n \\ &= (15^n + (-9)^n) + 210 \cdot 15^{n-1} - 10 \cdot (-9)^n, \end{aligned}$$

a więc liczba $15^{n+1} + (-9)^{n+1}$ ma tę samą ostatnią cyfrę, co $15^n + (-9)^n$. Teza wynika z zasady indukcji matematycznej. □

2 Liczby rzeczywiste

Liczby naturalne (całkowite dodatnie, ozn. $\mathbf{N}$), całkowite (ozn. $\mathbf{Z}$) i wymierne (ozn. $\mathbf{Q}$) są stosunkowo proste w opisie i dość łatwo je skonstruować (będzie to być może zrobione na kursie *Logika i struktury formalne*). Zakładamy, że czytelnik zna podstawowe fakty z teorii liczb. Liczby rzeczywiste (ozn. $\mathbf{R}$) to dużo bardziej skomplikowany zbiór. Zwykle wyobraża się, że $\mathbf{R}$ to oś liczbowa z zaznaczonymi punktami 0 i 1. Jest to bardzo dobra intuicja, ale na formalną definicję się nie nadaje. Są dwa podejścia: konstruktywne (np. konstrukcja Dedekinda) i aksjomatyczne (np. to przedstawione poniżej).

Zanim omówimy podstawowe własności liczb rzeczywistych, podkreślmy, że ich formalnie poprawna konstrukcja powstała dopiero w XX w., natomiast *poprawnie* posługiwano się tym pojęciem co najmniej kilkadziesiąt lat wcześniej. Wniosek: dobre intuicje są w matematyce co najmniej równie ważne, co formalne dowody.

Przede wszystkim w zbiorze liczb rzeczywistych można wykonywać dodawanie. W zbiorze $\mathbf{R}$ jest wyróżniona liczba 0. Dodawanie ma następujące własności:

$$\begin{aligned} &\text{dla wszystkich } a, b, c: && (a + b) + c = a + (b + c) && \text{(łączność)}, && (2) \\ &\text{dla wszystkich } a, b: && a + b = b + a && \text{(przemienność)}, && (3) \\ &\text{dla wszystkich } a: && a + 0 = a, && && (4) \\ &\text{dla każdego } a \text{ istnieje } b \text{ takie, że}: && a + b = 0. && && (5) \end{aligned}$$

W zbiorze liczb rzeczywistych można również mnożyć. Wyróżniona jest liczba 1, różna od 0. Mnożenie ma następujące własności:

$$\begin{aligned} &\text{dla wszystkich } a, b, c: && (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) && \text{(łączność)}, && (6) \\ &\text{dla wszystkich } a, b: && a \cdot b = b \cdot a && \text{(przemienność)}, && (7) \\ &\text{dla wszystkich } a: && a \cdot 1 = a, && && (8) \\ &\text{dla każdego } a \neq 0 \text{ istnieje } b \text{ takie, że}: && a \cdot b = 1. && && (9) \end{aligned}$$

Zachodzi prawo rozdzielności:

$$\text{dla wszystkich } a, b, c: \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \qquad (10)$$

Ponadto liczby rzeczywiste uporządkowane są przez relację bycia mniejszym, która ma następujące własności:

$$\begin{aligned} &\text{dla wszystkich } a, b: && a = b \text{ lub } a < b \text{ lub } b < a, && (11) \\ &\text{dla wszystkich } a, b: && \text{jeśli } a < b, \text{ to nieprawda, że } b < a, && (12) \\ &\text{dla wszystkich } a, b, c: && \text{jeśli } a < b \text{ oraz } b < c, \text{ to } a < c, && (13) \\ &\text{dla wszystkich } a, b, c: && \text{jeśli } a < b, \text{ to } a + c < b + c, && (14) \\ &\text{dla wszystkich } a, b, c: && \text{jeśli } a < b \text{ oraz } 0 < c, \text{ to } a \cdot c < b \cdot c. && (15) \end{aligned}$$

Wreszcie ostatnia własność, nazywana zasadą ciągłości

$$\begin{array}{l}\text{każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny;}\\ \text{każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny.}\end{array} \tag{16}$$

Wyjaśnienie: zbiór A nazywamy ograniczonym z góry, jeśli istnieje liczba m taka, że $a \leq m$ dla wszystkich $a \in A$; liczbę m nazywamy ograniczeniem górnym. Kres górny zbioru A to najmniejsze z ograniczeń górnych (o ile najmniejsza taka liczba istnieje). Analogicznie określa się pojęcie zbioru ograniczonego z dołu i kresu dolnego. Zbiór nazywamy ograniczonym, jeśli jest ograniczony z dołu i z góry.

Kres górny zbioru A oznaczamy przez $\sup A$, a kres dolny przez $\inf A$. Gdy A jest nieograniczony z góry, to zapisujemy to w postaci $\sup A = \infty$; analogicznie gdy A jest nieograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$. Podkreślmy, że ∞ oraz $(-\infty)$ nie są liczbami.

Uwaga. Kres górny to co innego niż element największy! Kresem górnym zbioru $\{x : x < 0\}$ jest 0, choć nie ma on elementu największego.

Przypomnijmy, że jeśli $a < b$ lub $a = b$, to piszemy $a \leq b$. Jeśli $b < a$, to piszemy $a > b$; analogicznie jeśli $b \leq a$, to piszemy $a \geq b$. Tę liczbę b, dla której $a + b = 0$, oznaczamy $(-a)$. Odejmowanie definiujemy poprzez $a - b = a + (-b)$. Analogicznie gdy $a \neq 0$, to tę liczbę b, dla której $a \cdot b = 1$, oznaczamy a^{-1}, zaś dzielenie definiujemy wzorem $a/b = a \cdot b^{-1}$. Dla $a \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$ oznaczamy przez a^n iloczyn n liczb a, tj. $a^1 = a$ oraz $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Ponadto oznaczamy $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. Jeśli $a \neq 0$, to przyjmujemy $a^0 = 1$. Nie nadajemy znaczenia symbolowi 0^0.

Zbiór z działaniami spełniającymi (2)–(10) nazywamy *ciałem liczbowym*. Jeśli spełnione są warunki (2)–(15), to mamy do czynienia z *uporządkowanym ciałem liczbowym*. Przykładem uporządkowanego ciała liczbowego jest zbiór liczb wymiernych; nie spełnia on jednak warunku (16). **Uporządkowane ciało liczbowe spełniające zasadę ciągłości musi być identyczne ze zbiorem liczb rzeczywistych**. Bardzo istotne w dowodzie tego faktu jest następujące, z pozoru banalne twierdzenie.

Twierdzenie (o gęstości liczb wymiernych)**.** Niech A będzie zbiorem dodatnich liczb *wymiernych*. Wówczas $\inf A = 0$.

Dowód. Niech $a = \inf A$. Oczywiście $a \geq 0$, więc $a+a \geq a$. Ponadto dla każdej liczby wymiernej $q > 0$ zachodzi $a \leq \frac{q}{2}$, a więc $a + a \leq q$. Stąd wynika, że $a + a \leq \sup A = a$. Ostatecznie $a + a = a$, skąd $a = 0$. □

Przykład 6. Zasada ciągłości pozwala udowodnić, że istnieje pierwiastek z dwóch, tj. taka liczba $a > 0$, że $a \cdot a = 2$.

Dowód. Wystarczy określić

$$a = \sup\{b : b \cdot b \leq 2 \text{ oraz } b > 0\}.$$

Dla dowolnej liczby wymiernej $q > 0$ istnieje liczba wymierna $r > 0$ taka, że $2 - q \leq r \cdot r \leq 2$ (jak ją znaleźć?). Wobec definicji a, zachodzi $a \geq r$, skąd $a \cdot a \geq r \cdot r \geq 2 - q$, czyli $2 - a \cdot a \leq q$. Z twierdzenia o gęstości liczb wymiernych wynika więc, że $2 - a \cdot a \leq 0$.

Z drugiej strony dla dowolnej liczby wymiernej $q > 0$ istnieje liczba wymierna $r > 0$ taka, że $2 \leq r \cdot r \leq 2+q$. Jeśli teraz $b \cdot b \leq 2$ i $b > 0$, to $b \cdot b \leq r \cdot r$, skąd $b \leq r$. Wynika stąd, że r jest ograniczeniem górnym zbioru, którego supremum wynosi a, czyli $a \leq r$. Stąd $a \cdot a \leq r \cdot r \leq 2 + q$, czyli $a - 2 \leq q$. Z twierdzenia o gęstości liczb wymiernych wynika, że $a - 2 \leq 0$.

Ostatecznie stwierdzamy, że $0 \leq a - 2 \leq 0$, czyli $a = 2$. □

Analogicznie można określić potęgowanie dodatnich liczb rzeczywistych. Wygodniej będzie jednak wprowadzić inną definicję znacznie później, w rozdziale o szeregach.

Jak wiadomo, $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Istotnie, gdyby było, to mielibyśmy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dla pewnych m, n bez wspólnego czynnika pierwszego (tj. *względnie pierwszych*). Ale wtedy $m^2 = 2n^2$, czyli m jest podzielne przez 2, i wobec tego $n^2 = 2(\frac{m}{2})^2$, czyli n też jest parzyste. Sprzeczność.

Przykład 7. Wyznaczymy kres dolny zbioru

$$A = \left\{ \tfrac{m}{n} + \tfrac{n}{n+m} \ : \ n, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Zauważmy, że $\frac{m}{n} + \frac{n}{n+m} \geq \frac{m}{n+m} + \frac{n}{n+m} = 1$, zatem A jest ograniczony z dołu i $\inf A \geq 1$. Ponadto jeśli przyjmiemy $n = k\,m$, to otrzymamy

$$\tfrac{m}{k\,m} + \tfrac{k\,m}{m+k\,m} = \tfrac{1}{k} + \tfrac{k}{1+k} \leq 1 + \tfrac{1}{k}.$$

Wobec tego $\inf A \leq 1 + \frac{1}{k}$ dla każdego $k \in \mathbf{N}$. Stąd $\inf A \leq 1$ i ostatecznie $\inf A = 1$. □

Uwaga. Ostatni krok rozumowania formalnie powinien wyglądać następująco. Dla dowolnej liczby wymiernej $q > 0$ istnieje $k \in \mathbf{N}$ taka, że $\frac{1}{k} < q$. Ponadto A zawiera element nie większy od $1 + \frac{1}{k} \leq 1 + q$. Wobec tego $\inf A \leq 1 + q$, czyli $\inf A - 1 \leq q$. Z twierdzenia o gęstości liczb wymiernych wynika, że $\inf A - 1 \leq 0$.

Przykład 8. Zachodzi $0,99999... = 1$.

Dowód. Łatwo zawuażyć, że $0,99999... \geq 1 - q$ dla każdej liczby *wymiernej* $q > 0$. Stąd, wobec twierdzenia o gęstości liczb pierwszych, $0,99999... \geq 1$. Nierówność w drugą stronę jest oczywista. □

Uwaga. Ścisły sens nadamy symbolowi $0,99999...$ później, w rozdziale o szeregach.

Najważniejszą nierównością jest $x^2 \geq 0$ ($x \in \mathbf{R}$). Całkiem elementarnie można z niej wywnioskować wiele interesujących twierdzeń.

Przykład 9. Rozważmy trójmian kwadratowy $p\,x^2 + q\,x + r$ ($p > 0$). Gdy $q^2 - 4\,p\,r < 0$ to , zaś $p\,x^2 + q\,x + r > 0$ dla wszystkich x. Gdy $q^2 - 4\,p\,r = 0$, to $p\,x^2 + q\,x + r \geq 0$ dla wszystkich x. Gdy $q^2 - 4\,p\,r > 0$, to $p\,x^2 + q\,x + r$ przyjmuje zarówno dodatnie, jak ujemne wartości.

Dowód. Teza wynika wprost z równości $p\,x^2 + q\,x + r = p\left((x + \frac{q}{2p})^2 - \frac{q^2 - 4\,p\,r}{4p}\right)$ oraz z najważniejszej nierówności. □

Liczba $q^2 - 4\,p\,r$ nazywana jest *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego $p\,x^2 + q\,x + r$.

Przykład 10 (nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego)**.** Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ oraz $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ zachodzi

$$(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + ... + a_n\,b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2).$$

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_1\,x - b_1)^2 + (a_2\,x - b_2)^2 + (a_3\,x - b_3)^2 + ... + (a_n\,x - b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)\,x^2 + 2(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + ... + a_n\,b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2). \end{aligned}$$

Oznacza to, że wyróżnik trójmianu kwadratowego po prawej stronie jest niedodatni. □

Ważnymi pozdbiorami $\mathbf{R}$ są *przedziały*. Jeśli $a < b$, to oznaczamy:

$$(a,b) = \{c \ : \ a < c < b\}, \qquad [a,b] = \{c \ : \ a \leq c \leq b\},$$
$$[a,b) = \{c \ : \ a \leq c < b\}, \qquad (a,b] = \{c \ : \ a < c \leq b\}.$$

Ponadto definiujemy przedziały nieograniczone:

$$(a,\infty) = \{c \ : \ a < c\}, \qquad [a,\infty) = \{c \ : \ a \leq c\},$$
$$(-\infty,b) = \{c \ : \ c < b\}, \qquad (-\infty,b] = \{c \ : \ c \leq b\}.$$