Analiza matematyczna 1
Notatki do wykładu
Mateusz Kwaśnicki

3 Przestrzenie metryczne

Jedną z najważniejszych funkcji rzeczywistych jest *wartość bezwzględna*:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0, \\ -a & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

Wartość bezwzględna liczby x to odległość punktu x od 0 na osi liczbowej. Ta interpretacja przydaje się do szybkiego rozwiązywania prostych nierówności.

Przykład 1. Rozwiązać nierówność $|x - 2| < |x|$.

Rozwiązanie. Rozwiązaniem jest zbiór tych x, które bliższe są 2 niż 0. Są to oczywiście wszystkie liczby większe od 1. □

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, musielibyśmy rozważyć trzy przypadki: $x < 0$, $0 \leq x < 2$ oraz $2 \leq x$. Byłoby to może rozwiązanie bardziej formalne, ale dłuższe i mniej intuicyjne.

Uogólnieniem odległości na osi liczbowej, uwzględniającym także odległość na płaszczyźnie, w przestrzeni i wiele innych przykładów, jest pojęcie metryki.

Definicja. Niech X będzie niepustym zbiorem. **Metryką** na zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d : X \times X \to [0, \infty)$, spełniającą następujące warunki:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad (x, y \in X) \qquad (\textit{warunek tożsamości}); \tag{1}$$
$$d(x, y) = d(y, x) \qquad (x, y \in X) \qquad (\textit{warunek symetrii}); \tag{2}$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad (x, y, z \in X) \qquad (\textit{warunek trójkąta}). \tag{3}$$

Zbiór X wraz z metryką d tworzy **przestrzeń metryczną**.

Metryki najczęściej oznacza się literami d, ϱ, δ.

Przykład 2. *Metryka „moduł różnicy”*: Niech $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Sprawdzenie warunków metryki jest prostym ćwiczeniem. □

Przez $\mathbf{R}^n$ oznaczamy zbiór wszystkich n-elementowych ciągów liczb rzeczywistych. Elementy tego zbioru oznaczamy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ itp.

Przykład 3. *Metryka euklidesowa* w przestrzeni n-wymiarowej: $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}.$$

Sprawdzamy warunki metryki. Warunek tożsamości:

$$\begin{aligned} d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = 0 &\iff (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2 = 0 \\ &\iff a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = ... = a_n - b_n = 0 \\ &\iff (a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n); \end{aligned}$$

skorzystaliśmy tu z faktu, że suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero. Warunek symetrii:

$$d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = d((b_1, b_2, ..., b_n), (a_1, a_2, ..., a_n))$$

wynika z równości $(a_j - b_j)^2 = (b_j - a_j)^2$. Warunek trójkąta:

$d((a_1, a_2, ..., a_n), (c_1, c_2, ..., c_n)) \le d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) + d((b_1, b_2, ..., b_n), (c_1, c_2, ..., c_n)$

zapiszmy, podstawiając $a_j - b_j = p_j$, $b_j - c_j = q_j$, $a_j - c_j = p_j + q_j$:

$$\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 + ... + (p_n + q_n)^2} \le \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2}\,.$$

Jest to tzw. *nierówność Minkowskiego*, którą udowodnimy, korzystając z nierówności Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza. Obie strony nierówności Minkowskiego są nieujemne, więc jest ona równoważna nierówności:

$$\begin{aligned}(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 + ... + (p_n + q_n)^2 \le {} & \left(p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2\right) + \left(q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2\right) \\ & + 2\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2}\,.\end{aligned}$$

Po redukcji, otrzymujemy równoważnie:

$$p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + ... + p_n\, q_n \le \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2}\,.$$

Jest to nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego. □

Uwaga. Dla $n = 1$ metryka euklidesowa jest równa metryce „moduł różnicy". Dla $n = 2$ oraz $n = 3$ jest to zwykła odległość odpowiednio na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej.

Przykład 4. Dla punktów x, y na sferze (tj. na powierzchni kuli) niech $d(x, y)$ oznacza długość najkrótszego łuku łączącego x i y w całości zawartego w sferze, a $\varrho(x, y)$ długość odcinka łączącego x i y. Można dowieść, że d i ϱ są metrykami oraz że $\varrho(x, y) \le d(x, y) \le \pi\, \varrho(x, y)$. □

Przykład 5. Niech d będzie metryką „moduł różnicy" na $\mathbf{R}$ i niech ϱ będzie tzw. metryką dyskretną: $\varrho(x, y) = 0$ jeśli $x = y$ oraz $\varrho(x, y) = 1$ w przeciwnym przypadku. Wówczas nie istnieją liczby dodatnie m i M takie, że $m\, \varrho(x, y) \le d(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ lub $d(x, y) \le M\, \varrho(x, y)$. □

Pojęcie metryki ma odpowiadać odległości. Warunek tożsamości mówi, że odległość między różnymi punktami jest zawsze dodatnia. Warunek symetrii można rozumieć następująco: mierzona jest odległość *między dwoma punktami*, a nie odległość *z jednego punktu do drugiego*. W wielu przypadkach z życia ten warunek nie jest spełniony, np. odległości podawane na szlakach górskich często zależą od kierunku, w którym szlak jest przemierzany. Warunek trójkąta oznacza, że (najkrótsza) droga z punktu x do punktu z nie może być dłuższa od najkrótszej drogi z x do z przechodzącej dodatkowo przez y.

Z warunków (1)–(3) wynika wiele innych własności.

Wniosek. Jeśli d jest metryką na zbiorze X, to dla wszystkich x, y, z zachodzi

$$d(x, y) \ge |d(x, z) - d(y, z)|\,.$$

Dowód. Wobec warunku trójkąta (i symetrii),

$$d(x, y) \ge d(x, z) - d(y, z) \qquad \text{oraz} \qquad d(x, y) \ge d(y, z) - d(x, z).$$

Stąd i z definicji wartości bezwzględnej wynika teza. □

Teoria przestrzeni metrycznych jest częścią *topologii*, dziedziny matematyki zajmującej się przekształceniami ciągłymi. Obszerniejsze wprowadzenie do tej dziedziny wymagałoby zbyt dużo czasu. Przestrzenie metryczne będą dla nas kontekstem do rozważań o granicy, ciągłości funkcji rzeczywistych itp.

Jeśli nie jest powiedziane inaczej, w zbiorze liczb rzeczywistych zawsze mówimy o metryce „moduł różnicy". Ogólniej: w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ *naturalną* metryką jest metryka euklidesowa.

4 Ciągi i zbieżność

Definicja. Ciągiem elementów zbioru X nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbf{N} \to X$. Czasem przez ciąg będziemy rozumieli funkcję $a : \{k, k+1, k+2, k+3, ...\} \to X$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Wielkość $a(n)$ nazywamy **n-tym wyrazem** ciągu a i oznaczamy a_n. Często zamiast „ciąg a” mówimy „ciąg (a_n)”, „ciąg $(a_n : n \in \mathbf{N})$” lub po prostu „ciąg a_n”. Zbiór wszystkich ciągów elementów X oznaczamy przez $X^{\mathbf{N}}$.

Ciągi mogą być zadane jawnym wzorem (np. $a_n = 2^n - 1$), rekurencyjnie (np. $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla $n \geq 1$, $a_1 = 1$) lub w dowolny inny sposób (np. a_n to minimalna liczba ruchów, by przenieść wieżę wysokości n w łamigłówce „wieże z Hanoi”).

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych nazywamy **ciągiem liczbowym**. Mówimy, że (a_n) to:

- **ciąg arytmetyczny**, jeśli różnica $a_{n+1} - a_n$ nie zależy od n;
- **ciąg geometryczny**: jeśli $a_n \neq 0$ oraz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie zależy od n;
- **ciąg stały**, jeśli wartość a_n nie zależy od n;
- **ciąg rosnący** lub **ciąg ściśle rosnący**, jeśli $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n;
- **ciąg malejący** lub **ciąg ściśle malejący**, jeśli $a_{n+1} < a_n$ dla każdego n;
- **ciąg niemalejący** lub **ciąg rosnący w szerszym sensie**, jeśli $a_{n+1} \geq a_n$ dla każdego n;
- **ciąg nierosnący** lub **ciąg malejący w szerszym sensie**, jeśli $a_{n+1} \leq a_n$ dla każdego n;
- **ciąg monotoniczny**, jeśli jest ciągiem niemalejącym lub ciągiem nierosnącym;
- **ciąg ściśle monotoniczny**, jeśli jest ciągiem rosnącym lub ciągiem malejącym;
- **ciąg ograniczony (ogr. z góry, ogr. z dołu)**, jeśli zbiór wyrazów $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ jest ograniczony (ogr. z góry, ogr. z dołu).

Przykład 6.

- Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = 2n+3$ jest ciągiem arytmetycznym, rosnącym, ograniczonym z dołu.
- Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = 3 \cdot 2^{-n}$ jest ciągiem geometrycznym, malejącym, ograniczonym.
- Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = (-10)^n$ jest ciągiem geometrycznym, niemonotonicznym, nieograniczonym.
- Każdy ciąg arytmetyczny jest ciągiem stałym, rosnącym lub malejącym. □

Przykład 7 (ciąg Fibonacciego)**.** Leonardo Fibonacci rozważał w opublikowanym w 1202 roku dziele *Liber abaci* następujący uproszczony model rozmnażania się królików. W pierwszym miesiącu jest jedna młoda para królików i nie ma dojrzałych królików. Młode króliki dojrzewają w ciągu jednego miesiąca, dorosłe umierają po kolejnym miesiącu, a każda para co miesiąc wydaje na świat parę młodych.

Niech a_n oznacza liczbę młodych par w n-tym roku, a b_n — liczbę par dorosłych. Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_{n+1} &= a_n + b_n, \\ b_1 &= 0, & b_{n+1} &= a_n. \end{aligned}$$

Dla $n \geq 3$ mamy więc:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

i ponadto $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Rosnący ciąg liczb całkowitych (a_n) nazywany jest **ciągiem Fibonacciego** (był on jednak badany dużo wcześniej przez matematyków hinduskich). □

Definicja. Ciąg (b_n) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n), jeśli istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (k_n) taki, że $b_n = a_{k_n}$ dla wszystkich n.

Przykład 8. Jeśli $a_n = 2^n$, $b_n = 4^n$, to $b_n = a_{2n}$, więc (b_n) jest podciągiem (a_n). Podciąg ciągu rosnącego jest rosnący, analogiczną własność mają ciągi niemalejące, malejące, nierosnące, monotoniczne, ograniczone. Podciąg (c_n) podciągu (b_n) ciągu (a_n) sam jest podciągiem ciągu (a_n); jeśli bowiem $c_n = b_{l_n}$, $b_n = a_{k_n}$, to $c_n = a_{k_{l_n}}$.

Definicja. Mówimy, że twierdzenie zachodzi dla **prawie wszystkich liczb naturalnych**, jeśli jest ono nieprawdziwe dla skończenie wielu liczb naturalnych. Równoważnie: twierdzenie zachodzi dla prawie wszystkich liczb naturalnych, jeśli istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich $n \geq N$.

Przykład 9. Dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzi $2^n \geq n$, zaś dla prawie wszystkich $2^n \geq n^2$ (wyjątkiem jest $n = 3$). Również dla prawie wszystkich n mamy $2^n > n^3$ — nierówność ta jest fałszywa tylko dla $n \in \{2, 3, ..., 9\}$. Ogólniej można udowodnić, że

$$\text{dla każdego } k \text{, dla prawie wszystkich } n \in \mathbf{N} \text{ zachodzi } 2^n \geq n^k.$$

Warto podkreślić, że kwantyfikatora „dla każdego” nie można zamienić miejscami z kwantyfikatorem „dla prawie wszystkich”, bowiem zdanie

$$\text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbf{N}\text{, dla każdego } k \text{ zachodzi } 2^n \geq n^k$$

jest fałszywe — dla dowolnego $n > 1$ znajdziemy k (np. $k = n + 1$) takie, że $2^n < n^k$. □

Definicja. Niech (a_n) będzie ciągiem elementów przestrzeni metrycznej X z metryką d. Mówimy, że ciąg (a_n) jest **zbieżny** do granicy $g \in X$, co zapisujemy w postaci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \text{lub} \qquad a_n \to g \text{ gdy } n \to \infty,$$

jeśli spełniony jest następujący warunek:

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0\text{, warunek } d(a_n, g) < \varepsilon \text{ zachodzi dla prawie wszystkich } n. \tag{4}$$

Równoważnie,

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje } N \in \mathbf{N} \text{ takie, że dla } n \geq N \text{ zachodzi } d(a_n, g) < \varepsilon, \tag{5}$$

lub symbolicznie:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\geq N} d(a_n, g) < \varepsilon.$$

Jeśli ciąg nie jest zbieżny, mówimy, że jest **rozbieżny**.

Uwaga. Często wygodnie jest wprost podkreślić zależność N od ε, tj. zapisać definicję zbieżności ciągu (a_n) do g w postaci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{istnieje funkcja } N \text{ taka, że} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{n\geq N(\varepsilon)} d(a_n, g) < \varepsilon. \tag{6}$$

Twierdzenie. Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Jeśli g i h są granicami ciągu (a_n), to dowolnego $\varepsilon > 0$, dla prawie wszystkich n:

$$d(g,h) \le d(g,a_n) + d(a_n,h) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Stąd $d(g,h) = 0$, czyli $g = h$. □

Twierdzenie. Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy. □

Przypomnijmy, że jeśli nie jest zaznaczone inaczej, dla ciągów liczbowych używamy metryki „moduł różnicy". Zatem w tym przypadku:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{n\ge N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Przykład 10. Ciąg stały (a_n), gdzie $a_n = c$ dla wszystkich n, jest zbieżny do c w dowolnej metryce. □

Przykład 11. Ciąg $(\frac{1}{n})$, a więc również każdy jego podciąg, jest zbieżny do zera. □

Przykład 12. Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest zbieżny do 1. W istocie, niech $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że

$$d(a_n, 1) = \left|\tfrac{n}{n+1} - 1\right| = \tfrac{1}{n+1}\,.$$

Aby zachodziło $d(a_n,1) < \varepsilon$, wystarcza $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, zatem w definicji (6) wystaczy wziąć np. $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$ (przez $\lceil x \rceil$ oznaczamy najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x, czasem nazywaną *sufitem* liczby x). □

Uwaga. W metryce dyskretnej ρ powyższy ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 1, bowiem $\rho(a_n,1) = 1$.

Przykład 13. Ciąg (a_n), gdzie $a_n = \sqrt[n]{3}$, jest zbieżny do 1. W istocie, $a_n \ge 1$, zaś na mocy nierówności Bernoulliego,

$$a_n = \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{1 + n\cdot\frac{2}{n}} \le \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 1 + \frac{2}{n}\,.$$

Stąd $|a_n - 1| \le \frac{2}{n}$, więc aby $|a_n - 1| < \varepsilon$ wystarcza, że $n > \frac{2}{\varepsilon}$. □

Przykład 14. Ciąg (p_n) punktów płaszczyzny $\mathbf{R}^2$, $p_n = (x_n, y_n)$, jest zbieżny w metryce euklidesowej do granicy $g = (a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli $d(p_n, g) < \varepsilon$, to również $|x_n - a| < \varepsilon$ oraz $|y_n - b| < \varepsilon$. To dowodzi implikacji w jedną stronę. Podobnie, jeśli $|x_n - a| < \varepsilon$ oraz $|y_n - b| < \varepsilon$, to $d(p_n, g) < \sqrt{2}\,\varepsilon$. Z tego powodu zbieżność (x_n) do a oraz (y_n) do b pociąga zbieżność p_n do g w metryce d. □

Twierdzenie. Jeśli $a_n = b_n$ dla prawie wszystkich n, to (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy (b_n) jest zbieżny, i w tym przypadku oba ciągi mają tę samą granicę. □

Twierdzenie. Ciąg (a_n) jest zbieżny do g w metryce d wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy $(d(a_n, g))$ jest zbieżny do zera. □

Definicja. Ciąg (a_n) nazywa się **ciągiem podstawowym** (lub **ciągiem Cauchy'ego** bądź **ciągiem fundamentalnym**), jeśli

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla wszystkich $k, l \ge N$ zachodzi $d(a_k, a_l) < \varepsilon$.

Symbolicznie:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbf{N}} \bigwedge_{k\ge N} \bigwedge_{l\ge N} d(a_k, a_l) < \varepsilon.$$

Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem podstawowym. Podciąg ciągu podstawowego jest ciągiem podstawowym. Jeśli ciąg jest podstawowy i zawiera podciąg zbieżny do pewnej granicy g, to cały ciąg jest zbieżny do g. □