Analiza matematyczna 1
Notatki do wykładu
Mateusz Kwaśnicki

5 Ciągi liczbowe

Definicja. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że:

- ciąg (a_n) jest **rozbieżny do nieskończoności** ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), jeśli

  dla każdego $K \in \mathbf{R}$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \ge N$ zachodzi $a_n > K$;

- ciąg (a_n) jest **rozbieżny do minus nieskończoności** ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), jeśli

  dla każdego $K \in \mathbf{R}$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \ge N$ zachodzi $a_n < K$.

Uwaga. Często mówi się o ciągach „zbieżnych do $\pm\infty$". Bez dodatkowego komentarza jest to niepoprawne. Można jednak mówić o **granicach niewłaściwych**; wtedy przez „ciąg zbieżny do $\pm\infty$" można w domyśle rozumieć „ciąg zbieżny do granicy niewłaściwej $\pm\infty$".

Można też rozważać zbiór $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ i określić na nim metrykę w odpowiedni sposób, na przykład następująco:

$$d^*(x, y) = |f(x) - f(y)|,$$

gdzie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ dla $x \in \mathbf{R}$, $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = -1$. Można udowodnić, że ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do granicy (właściwej lub niewłaściwej) $g \in \mathbf{R}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do g w metryce d^*, częściowo mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. Ciąg (a_n) jest rozbieżny do nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a_n}{1+|a_n|}$ jest zbieżny do 1. Podobnie $\lim_{n\to\infty} = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+|a_n|} = -1$.

Dowód. Zauważmy, że:

$$1 - \frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{1+x}, \qquad x > 0.$$

Stąd jeśli $\varepsilon > 0$, $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, to $\left|1 - \frac{a_n}{1+|a_n|}\right| < \frac{1}{1+\varepsilon^{-1}} < \varepsilon$, czyli jeśli $\lim_{n\to\infty} = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \arctan a_n = \frac{\pi}{2}$. Podobnie jeśli $M > 0$, $\left|1 - \frac{a_n}{1+|a_n|}\right| < \frac{1}{M+1}$, to $a_n > M$, co daje implikację w drugą stronę.

Druga część twierdzenia ma analogiczny dowód. □

Przykład 1. Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = 3^n + (-2)^n$ jest rozbieżny do nieskończoności. W istocie, niech $K \in \mathbf{R}$. Wybierzmy liczbę naturalną $N > K + 1$. Dla $n \ge N$ mamy

$$a_n \ge 3^n - 2^n \ge 3 \cdot 2^{n-1} - 2^n = 2^{n-1} > n - 1 > K.$$

Twierdzenie. Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Ściślej:

- Każdy ciąg niemalejący jest zbieżny (gdy jest ograniczony z góry) lub jest rozbieżny do nieskończoności (gdy jest nieograniczony z góry). Jeśli jest zbieżny, to granicą jest kres górny zbioru wyrazów ciągu.
- Każdy ciąg nierosnący jest zbieżny (gdy jest ograniczony z dołu) lub jest rozbieżny do minus nieskończoności (gdy jest nieograniczony z dołu). Jeśli jest zbieżny, to granicą jest kres dolny zbioru wyrazów ciągu.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem niemalejącym. Jeśli $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ jest nieograniczony z góry, to dla każdego $K \in \mathbf{R}$ istnieje wyraz a_N taki, że $a_N > K$. Wówczas dla wszystkich $n \geq N$ zachodzi $a_n \geq a_N > K$, zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Jeśli A jest ograniczony z góry, to niech $g = \sup A$. Wówczas $g - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym A, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wyraz a_N taki, że $a_N > g - \varepsilon$ i wobec tego $a_n > g - \varepsilon$ dla wszystkich $n \geq N$. Z drugiej strony $a_n \leq g < g + \varepsilon$ i ostatecznie $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq N$.

Dowód drugiego stwierdzenia jest analogiczny. □

Przykład 2. Niech $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1$. Wówczas $a_n \geq 1$ (bo $x + \frac{1}{x} \geq 2$) oraz $a_{n+1} < a_n$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący i ograniczony, przez co — zbieżny.

Niech $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$. Wówczas $b_n < 2$ dla wszystkich n (dowód indukcyjny) oraz

$$b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} > \sqrt{2b_n} > b_n,$$

a więc ciąg (b_n) jest rosnący i ograniczony. Wobec tego jest zbieżny.

Niech $c_n = 1$, $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n^2})\, c_n + 1$. Wówczas $c_n \leq n$ (dowód indukcyjny), przez co $c_{n+1} \geq c_n$, więc (c_n) jest niemalejący. Poniżej dowiedziemy, że nie jest zbieżny, więc nie jest ograniczony. □

Definicja. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Określamy **granicę górną** oraz **granicę dolną** ciągu (a_n) wzorami

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup \{a_k : k \geq n\} \Big);$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf \{a_k : k \geq n\} \Big).$$

W przypadku, gdy któraś z granic po prawej stronie jest niewłaściwa, mówimy o niewłaściwej granicy górnej lub dolnej.

Stosuje się również oznaczenie $\overline{\lim}$ na granicę górną oraz $\underline{\lim}$ na granicę dolną.

Uwaga. Na mocy twierdzenia poprzedzającego definicję, granice (właściwe lub nie) w definicji lim sup i lim inf istnieją i ponadto

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf \Big\{ \sup \{a_k : k \geq n\} \ : \ n \in \mathbf{N} \Big\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup \Big\{ \inf \{a_k : k \geq n\} \ : \ n \in \mathbf{N} \Big\}.$$

W ten sposób można zdefiniować granicę górną i granicę dolną ciągu liczbowego, a także (na mocy twierdzenia nieco poniżej) jego granicę, nie używając kwantyfikatorów.

Podobnie jak granica, również granica górna i granica dolna ciągu nie zależą od skończonej liczby wyrazów ciągu.

Twierdzenie. Niech $K \in \mathbf{R}$. Jeśli $a_n \geq b_n$ dla prawie wszystkich n, to również $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n$ oraz $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} b_n$

Dowód. Załóżmy, że $a_n \geq b_n$ dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$. Wtedy $\inf \{a_k : k \geq n\} \geq \inf \{a_k : k \geq n\}$ dla $n \in \mathbf{N}$, a więc $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n$. Ponieważ granica dolna ciągu nie zależy od jego pierwszych N wyrazów, teza jest prawdziwa również gdy $a_n \geq b_n$ dla $n \geq N$. Drugiego stwierdzenia dowodzi się podobnie. □

Twierdzenie. Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, i wówczas $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. Twierdzenie to można rozszerzyć na przypadek granic niewłaściwych.

Dowód. Załóżmy, że $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = g$. Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas dla prawie wszystkich n:

$$g - \varepsilon < \inf\{a_k \ : \ k \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_k \ : \ k \geq n\} < g + \varepsilon,$$

czyli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Jeśli (a_n) jest zbieżny do g i $\varepsilon > 0$, to $g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon$ dla prawie wszystkich n, skąd $g - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq g + \varepsilon$. Stąd $\liminf_{n\to\infty} a_n = g$. Analogicznie postępujemy dla granicy górnej.

Przypadek granic niewłaściwych jest analogiczny. □

Wniosek. Jeśli (a_n) i (b_n) są zbieżne i $a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich n, to $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$. □

Wniosek. Dla dowolnego ciągu liczbowego (a_n), $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$. □

Wniosek. Jeśli $|a_n - g| < b_n$ dla prawie wszystkich n, zaś $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. □

Wniosek (twierdzenie o trzech ciągach)**.** Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ i ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to również (b_n) jest zbieżny do g. □

Przykład 3. Niech $b_n = \sqrt[n]{4^n - 3^n}$. Wówczas $b_n \leq 4$ oraz $b_n \geq \sqrt[n]{4^n - 3 \cdot 4^{n-1}} = 4\sqrt[n]{1 - \frac{3}{4}} = 4\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$. Ciągi $a_n = 4\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ i $c_n = 4$ dążą do tej samej granicy 4, zatem również $\lim_{n\to\infty} b_n = 4$.

Wniosek (twierdzenie o dwóch ciągach)**.** Jeśli $a_n \leq b_n$ i ciąg (a_n) jest rozbieżny do nieskończoności, to również (b_n) jest rozbieżny do nieskończoności. □

Definicja. Element g nazywamy **punktem skupienia** ciągu (a_n), jeśli istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n) zbieżny do g.

Twierdzenie. Granica górna i granica dolna ciągu (a_n), jeśli są granicami właściwymi, są punktami skupienia ciągu (a_n).

Dowód. Przyjmijmy, że $\limsup_{n\to\infty} a_n = g$. Skonstruujemy ciąg k_n indukcyjnie. Niech $k_1 = 1$. Przypuśćmy, że znana jest już wartość k_n. Określamy k_{n+1} następująco.

Istnieje N takie, że dla wszystkich $j \geq N$ zachodzi

$$g \leq \sup\{a_i \ : \ i \geq j\} < g + \tfrac{1}{n}.$$

Niech $j = \max(N, k_n + 1)$. Istnieje więc $i \geq j$ takie, że

$$g - \tfrac{1}{n} < a_i < g + \tfrac{1}{n}.$$

Określamy $k_{n+1} = i$.

Z konstrukcji wynika, że (k_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych oraz $|a_{k_n} - g| < \frac{1}{n-1}$ dla wszystkich $n \geq 2$. Stąd $a_{k_n} \to g$. □

Wniosek (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa)**.** Z każdego ciagu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny (np. do granicy górnej lub granicy dolnej). □

Uwaga. Przestrzeń metryczną X o tej własności, że każdy ciąg elementów X zawiera podciąg zbieżny, nazywa się **przestrzenią zwartą**. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa mówi, że każdy ograniczony przedział domknięty jest zbiorem zwartym.

Wniosek. Niech (a_n) będzie podstawowym ciągiem liczbowym. Wówczas (a_n) jest ograniczony, a więc zawiera podciąg zbieżny. Wynika stąd, że (a_n) jest zbieżny.

Uwaga. Jeśli w przestrzeni metrycznej każdy ciąg podstawowy jest zbieżny, to przestrzeń nazywamy **zupełną**. Zbiór liczb rzeczywistych z metryką „moduł różnicy" jest więc przestrzenią zupełną.

Uwaga. Warunek „ciąg (a_n) jest ciągiem podstawowym", tzn. warunek:

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla wszystkich $k, l \geq N$ zachodzi $|a_k - a_l| < \varepsilon$

nazywa się **warunkiem Cauchy'ego** zbieżności ciągu.

Przykład 4. Niech

$$a_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Wówczas dla $k, l \in \mathbf{N}$, $k \leq l$, zachodzi:

$$\begin{aligned} |a_k - a_l| &= \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^{k+3}}{(k+2)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{l+1}}{l^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{l-k}}{l^2} \right|. \end{aligned}$$

Wyrażenie pod wartością bezwzględną jest nieujemne (można to zauważyć, łącząc kolejne pary wyrazów: suma każdej pary jest nieujemna); ponadto nie przekracza wartości pierwszego wyrazu (znów łączymy kolejne pary wyrazów, ale tym razem pomijając pierwszy wyraz). Stąd

$$|a_k - a_l| \leq \frac{1}{k^2}.$$

W ogólności, dla wszystkich $k, l \in \mathbf{N}$ mamy zatem

$$|a_k - a_l| \leq \frac{1}{\min(k^2, l^2)}.$$

Jeśli więc $k, l > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, to $|a_k - a_l| < \varepsilon$, a więc (a_n) jest ciągiem podstawowym. Na mocy wniosku, (a_n) jest zbieżny. Granicę ciągu (a_n) wyznaczyć jednak bardzo trudno; zachodzi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{12}$. □

Twierdzenie. Z każdego ciągu zbieżnego można wybrać podciąg monotoniczny.

Dowód. Niech (a_n) będzie zbieżny do g. Co najmniej jeden ze zbiorów $\{n : a_n > g\}$, $\{n : a_n = g\}$, $\{n : a_n < g\}$ jest nieskończony. Jeśli jest to drugi z nich, (a_n) zawiera podciąg stały. Gdy nieskończony jest trzeci zbiór, postępujemy podobnie, jak w przypadku, gdy nieskończony jest pierwszy. Załóżmy zatem, że $a_n > g$ dla nieskońćzenie wielu n.

Określamy ciąg k_n indukcyjnie. Niech k_1 będzie dowolnym indeksem, dla którego $a_{k_1} > g$. Przypuśćmy, że mamy już zdefiniowane k_n takie, że $a_{k_n} > g$. Istnieje N takie, że dla $j \geq N$ zachodzi $|a_j - g| < a_{k_n} - g$. Wybieramy $k_{n+1} \geq N$ takie, że $a_{k_{n+1}} > g$. Takie k_{n+1} istnieje wobec założenia, że $a_j > g$ dla nieskończenie wielu j. Ponadto $a_{k_{n+1}} - g < a_{k_n} - g$, czyli $a_{k_{n+1}} < a_{k_n}$.

W ten sposób wybraliśmy podciąg ściśle malejący (a_{k_n}) ciągu (a_n). □

Wniosek. Każdy ciąg zawiera podciąg monotoniczny.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Ciąg $(\frac{a_n}{1+|a_n|})$ jest ograniczony, więc ma podciąg zbieżny, który ma podciąg $(\frac{a_{k_n}}{1+|a_{k_n}|})$ monotoniczny. Ciąg (a_{k_n}) jest wówczas monotonicznym podciągiem ciągu (a_n). □

6 Arytmetyka granic i funkcje ciągłe

Definicja. Niech d będzie metryką na X, a ϱ — na Y. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy ciągłą, jeśli ze zbieżności ciągu (x_n) do g w metryce d wynika zbieżność ciągu $(f(x_n))$ do $f(g)$ w metryce ϱ.

Twierdzenie. Działania arytmetyczne są funkcjami ciągłymi. Ściślej,

$$\mathbf{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a - b \in \mathbf{R},$$
$$\mathbf{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \ni (a, b) \mapsto \frac{a}{b} \in \mathbf{R}$$

są funkcjami ciągłymi. Innymi słowy, jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = h$, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = g + h, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = g - h,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = g \cdot h, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h},$$

przy czym w ostatniej równości zakładamy, że $b_n \neq 0$ oraz $h \neq 0$.

Dowód. Udowodnimy tylko najtrudniejszy przypadek — ciągłość ilorazu. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje $N(\delta)$ takie, że dla $n \geq N(\delta)$ zachodzi $|a_n - g| < \delta$ oraz $|b_n - h| < \delta$. Wobec tego

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g}{h}\right| = \frac{|h\,a_n - g\,b_n|}{|h| \cdot |b_n|} \leq \frac{|h| \cdot |a_n - g| + |g| \cdot |h - b_n|}{|h| \cdot |b_n|} .$$

Załóżmy, że $\delta \leq \frac{|h|}{2}$. Wtedy

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g}{h}\right| < \frac{|h| \cdot \delta + |g| \cdot \delta}{|h| \cdot |h - \delta|} \leq \delta \, \frac{|h| + |g|}{|h| \cdot \frac{|h|}{2}} .$$

Jeśli dodatkowo $\delta \leq \frac{\varepsilon\,|h|^2}{2|h|+2|g|}$, to prawa strona nie przekracza ε. Ostatecznie dla $n \geq N(\delta)$ dla $\delta = \min(\frac{|h|}{2}, \frac{\varepsilon\,|h|^2}{2|h|+2|g|})$ otrzymujemy

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g}{h}\right| < \varepsilon .$$

To dowodzi tezy. □

Uwaga. Nie jest konieczne jawne wskazanie wielkości δ w powyższym dowodzie, zupełnie wystarczy uzasadnić, że δ spełniające odpowiednie warunki istnieje.

Wniosek. Indukcyjnie można udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} a_n^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k$ dla wszystkich $k \in \mathbf{N}$ i wszystkich ciągów zbieżnych (a_n). Innymi słowy, funkcja $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^k \in \mathbf{R}$ jest ciągła dla każdego $k \in \mathbf{N}$.

Przykład 5. Niech $a_n = \frac{p\,n+q}{r\,n+s}$, $r \neq 0$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p + \frac{q}{n}}{n + \frac{s}{n}} = \frac{p + q \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{n + s \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{p}{s} .$$

Analogicznie można obliczyć wiele podobnych granic. □

Przykład 6. Rozważmy ciąg (a_n) z przykładu 2. Wiemy, że jest on zbieżny — nazwijmy granicę g. Ponieważ $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1$, więc

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} - 1 = g + \frac{1}{g} - 1,$$

skąd łatwo $g = 1$. $\square$

Przykład 7. Rozważmy ciąg (c_n) z przykładu 2. Załóżmy (nie wprost), że jest on zbieżny — nazwijmy granicę g. Ponieważ $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n^2})\, c_n + 1$, więc

$$g = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right) \lim_{n\to\infty} a_n + 1 = g + 1,$$

sprzeczność. Zatem ciąg c_n nie jest zbieżny (i wobec tego jest rozbieżny do nieskończoności). $\square$

Twierdzenie. Potęgowanie liczb dodatnich jest funkcją ciągłą. Ściślej,

$$(0, \infty) \times \mathbf{R} \ni (a, b) \mapsto a^b \in \mathbf{R}$$

jest funkcją ciągłą. Innymi słowy, jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $\lim_{n\to\infty} b_n = h$, $a_n > 0$ oraz $g > 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = g^h.$$

Podobnie logarytmowanie, tj. funkcja

$$\big((0, \infty) \setminus \{1\}\big) \times (0, \infty) \ni (a, b) \mapsto \log_a b \in \mathbf{R}$$

jest funkcją ciągłą.

Dowód tego twierdzenia zamieszczony będzie wraz z wygodną definicją potęgowania i logarytmowania w rozdziale o szeregach.

Przykład 8. Rozważmy ciąg b_n z przykładu 2. Niech g będzie jego granicą. Ponieważ $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, otrzymujemy $g = \sqrt{2 + g}$, skąd $g > 0$ i $g^2 = 2 + g$. Ostatecznie $g = 2$.

Przykład 9. Niech $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{((n+1) - (n-1))}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}} = 1.$$

Twierdzenie. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a ciąg (b_n) jest ograniczony, to $\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = 0$.

Dowód. Jeśli $|b_n| \le K$ dla wszystkich n, to $|a_n\, b_n| \le K\, |a_n|$. $\square$

W przypadku, gdy nie da się zastosować twierdzeń o rachunku granic, potrzebne są inne metody. Poniższe twierdzenie dostarcza użytecznej techniki.

Twierdzenie. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich. Jeśli dla pewnego $g \in (0, \infty)$ zachodzi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < g,$$

to $a_n < g^n$ dla prawie wszystkich n i $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < g$. Analogicznie jeśli

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > g,$$

to $a_n > g^n$ dla prawie wszystkich n i $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > g$. Podobnie z warunku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$$

wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Dowód. Załóżmy, że zachodzi pierwszy z warunków. Niech h spełnia $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < h < g$. Istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < h$ dla $n \geq N$. Niech $M \in N$ będzie tak duże, że

$$\frac{h^M}{g^m} < a_N \, g^N.$$

Wówczas dla $n \geq M + N$ zachodzi:

$$a_n = a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq a_N \, h^{n-N} \leq a_N \, h^M \, h^{n-M-N} < g^{M+N} \, h^{n-M-N}.$$

W szczególności $a_n < g^n$ dla $n \geq M + N$. Stąd też

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{g^{M+N} \, h^{n-M-N}} = h \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{g^{M+N}}{h^{M+N}}} = h < g.$$

Analogicznie dowodzi się drugiej części twierdzenia, a trzecia wynika z dwóch poprzednich. □

Wniosek. Dla każdego $K > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{K^n} = 0$.

Dowód. Niech $a_n = \frac{n}{K^n}$. Wówczas $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{K\,n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{K\,n}$, a więc $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{K} < \frac{1+K}{2K}$ i wobec tego $0 < a_n < (\frac{1+K}{2K})^n$ dla prawie wszystkich n. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Wniosek. Zachodzi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Dowód. Wystarczy zastosować trzecią część twierdzenia do ciągu $a_n = n$. □

Twierdzenie. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Jeśli dla pewnego $g \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) < g,$$

to $a_n < n\,g$ dla prawie wszystkich n i $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} < g$. Analogicznie jeśli

$$\liminf_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) > g,$$

to $a_n > n\,g$ dla prawie wszystkich n i $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} > g$. Podobnie z warunku

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = g$$

wynika, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

Dowód. Wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie do ciągu 2^{a_n} i liczby 2^g oraz skorzystać z ciągłości potęgowanie i logarytmowania. □

Wniosek. Jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do g, to ciąg (A_n) średnich:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

również jest zbieżny do g.

Dowód. Niech $x_n = n\, A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g,$$

więc na mocy poprzedniego twierdzenia,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = g\,.$$

□