Analiza matematyczna 1
Notatki do wykładu
Mateusz Kwaśnicki

7 Sumy i iloczyny uogólnione

Dla dowolnych liczb $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_l$ określamy **sumę uogólnioną** i **iloczyn uogólniony**:

$$\sum_{j=k}^{l} a_j = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l, \qquad \prod_{j=k}^{l} a_j = a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot ... \cdot a_l.$$

Formalna definicja jest indukcyjna:

$$\sum_{j=k}^{k-1} a_j = 0, \qquad \sum_{j=k}^{l} a_j = \left(\sum_{j=k}^{l-1} a_j\right) + a_l,$$

$$\prod_{j=k}^{k-1} a_j = 1, \qquad \prod_{j=k}^{l} a_j = \left(\prod_{j=1}^{l-1} a_j\right) \cdot a_l,$$

dla dowolnych k oraz $n \geq k$. Sumy i iloczyny uogólnione pozwalają zastąpić nieprecyzyjny zapis z wielokropkiem jednoznacznym wyrażeniem.

Przykład 1. Zapis $a_1 + a_2 + ... + a_{2^n}$ może oznaczać zarówno $\sum\limits_{j=1}^{2^n} a_j$, jak $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{2^j}$.

Własności sum uogólnionych i iloczynów uogólnionych są bardzo podobne. Ponieważ sumy spotykane są częściej, nimi zajmiemy się w dalszej części. Wiele własności iloczynów można uzyskać z odpowiednich własności sum poprzez tożsamość

$$\log_2 \left(\prod_{j=k}^{l} a_j\right) = \sum_{j=k}^{l} \log_2 a_j,$$

prawdziwą dla dowolnych liczb dodatnich $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_l$.

Twierdzenie. Zachodzi

$$\sum_{j=k}^{l} c\, a_j = c \sum_{j=k}^{l} a_j, \qquad \sum_{j=k}^{l} (a_j + b_j) = \sum_{j=k}^{l} a_j + \sum_{j=k}^{l} b_j, \qquad \sum_{j=k}^{l} c = (l - k + 1)\, c.$$

Ponadto jeśli $k \leq n$ oraz $n + 1 \leq l$, to

$$\sum_{j=k}^{l} a_j = \sum_{j=k}^{n} a_j + \sum_{j=n+1}^{l} a_j, \qquad \sum_{j=k}^{l} a_j = \sum_{j=k-m}^{l-m} a_{j+m}.$$

Dowód. Indukcja względem l. □

Twierdzenie. Jeśli $a_j \leq b_j$ dla wszystkich j, to $\sum\limits_{j=k}^{l} a_j \leq \sum\limits_{j=k}^{l} b_j$.

Dowód. Indukcja względem l. □

Twierdzenie. Zachodzi

$$\sum_{i=k}^{l}\left(\sum_{j=m}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=m}^{n}\left(\sum_{i=k}^{l} a_{i,j}\right), \qquad \left(\sum_{i=k}^{l} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=m}^{n} b_j\right) = \sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_i\, b_j.$$

Dowód. Indukcja względem l (albo n). □

Twierdzenie. Jeśli σ, τ są funkcjami różnowartościowymi na zbiorze $\{k, k+1, k+2, ..., l\}$, mającymi jednakowy zbiór wartości T, zaś a_t, $t \in T$, są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to:

$$\sum_{j=k}^{l} a_{\sigma(j)} = \sum_{j=k}^{l} a_{\tau(j)}.$$

Dowód. Ustalmy k. Gdy $l = k-1$ obie strony są równe 0. Załóżmy, że równość zachodzi dla pewnego l i wszystkich funkcji σ, τ spełniających warunki twierdzenia oraz dowolnych liczb a_t. Niech σ, τ będą określone na $\{k, k+1, k+2, ..., l+1\}$ i załóżmy, że zbiory wartości σ i τ są sobie równe. Niech $\sigma(l+1) = \tau(n)$ i określmy τ^* tak, by $\tau^*(j) = \tau(j)$ dla $j \notin \{n, l+1\}$, $\tau^*(n) = \tau(l+1)$, $\tau^*(l+1) = \tau(n) = \sigma(l+1)$. Wówczas σ i τ^* zawężone do zbioru $\{k, k+1, k+2, ..., l\}$ mają jednakowe obrazy, a więc:

$$\sum_{j=k}^{l+1} a_{\sigma(j)} = \sum_{j=k}^{l} a_{\tau^*(j)} + a_{\tau^*(l+1)}.$$

Jeśli $n = l+1$, to $\tau = \tau^*$ i otrzymujemy tezę indukcyjną. Jeśli $n \leq l$, to

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{l} a_{\tau^*(j)} + a_{\tau^*(l+1)} &= \sum_{j=k}^{n-1} a_{\tau^*(j)} + a_{\tau^*(n)} + \sum_{j=n+1}^{l} a_{\tau^*(j)} + a_{\tau^*(l+1)} \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} a_{\tau(j)} + a_{\tau(l+1)} + \sum_{j=n+1}^{l} a_{\tau(j)} + a_{\tau(n)} = \sum_{j=k}^{l+1} a_{\tau(j)},\end{aligned}$$

i również otrzymujemy tezę indukcyjną. Na mocy zasady indukcji teza prawdziwa jest zawsze. □

Powyższe twierdzenie pozwala dla dowolnego skończonego zbioru T zdefiniować sumę liczb a_t, $t \in T$, jako

$$\sum_{t \in T} a_t = \sum_{j=k}^{l} a_{\sigma(j)}$$

dla dowolnej funkcji różnowartościowej i „na” $\sigma : \{k, k+1, k+2, ..., l\} \to T$. Zauważmy, że

$$\sum_{t \in \{k, k+1, ..., l\}} a_t = \sum_{j=k}^{l} a_j$$

Twierdzenie. Jeśli zbiory $A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_l$ są skończone i parami rozłączne, zaś A oznacza sumę tych zbiorów, to

$$\sum_{j=k}^{l}\sum_{t \in A_j} a_t = \sum_{t \in A} a_t.$$

Dowód. Indukcja względem l; jedyna trudność to równość

$$\sum_{t \in B} a_t + \sum_{t \in C} a_t = \sum_{t \in B \cup C} a_t$$

dla dowolnych rozłącznych zbiorów skończonych B oraz C. Aby ją udowodnić, wystarczy rozważyć dowolne funkcje różnowartościowe i „na” $\sigma_B : \{1, 2, 3, ..., n\} \to B$ oraz $\sigma_C : \{1, 2, 3, ..., m\} \to C$, określić $\sigma : \{1, 2, 3, ..., n+m\} \to B \cup C$ wzorem $\sigma(j) = \sigma_B(j)$ dla $j \leq n$, $\sigma(j) = \sigma_C(j-n)$ dla $j > n$ i skorzystać z własności sum uogólnionych. □

Twierdzenie. Zachodzi

$$\sum_{i=k}^{l}\sum_{j=k}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=k}^{l}\sum_{i=j}^{l} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in T} a_{i,j},$$

gdzie $T = \{(i,j) \ : \ k \leq i \leq j \leq l\}$.

Dowód. Teza wynika wprost z poprzedniego twierdzenia. □

Przykład 2. Wykorzystując powyższe twierdzenie, możemy wyznaczyć wartość sumy:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,2^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i = \sum_{j=1}^{n}(2^{n+1} - 2^j)$$
$$= n\,2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n\,2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

Twierdzenie (sumy teleskopowe)**.** Zachodzi $\sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_1$.

Dowód. Indukcja względem n. □

Przykład 3. Zachodzi $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\,(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. □

Twierdzenie (wzór sumacyjny Abela, sumowanie przez części)**.** Zachodzi

$$\sum_{j=k}^{l} a_j\,(b_{j+1} - b_j) = (a_{l+1}\,b_{l+1} - a_k\,b_k) - \sum_{j=k}^{l}(a_{j+1} - a_j)\,b_{j+1}.$$

Dowód. Indukcja względem l. □

8 Szeregi liczbowe

Definicja. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. **Szeregiem** o wyrazach a_n (oznaczenie $\sum_n a_n$) nazywamy **ciąg sum częściowych**

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Szereg oznaczamy $\sum_n a_n$. Szereg $\sum_n a_n$ nazywamy zbieżnym, jeśli ciąg sum częściowych szeregu jest zbieżny. W takim przypadku granicę nazywamy **sumą szeregu**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j,$$

a ciąg (r_n) dany wzorem

$$r_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - A_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_n$$

nazywamy **ciągiem reszt** szeregu $\sum_n a_n$.

Jeśli zbieżny jest szereg $\sum_n |a_n|$, to szereg $\sum_n a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**. Jeśli zbieżny jest szereg $\sum_n a_n$, ale szereg $\sum_n |a_n|$ jest rozbieżny, to mówimy, że $\sum_n a_n$ jest **warunkowo zbieżny**.

Uwaga. Tak jak w przypadku ciągów, możemy rozważać szeregi $\sum_n a_n$, gdzie (a_n) jest ciągiem o indeksach $n = k, k+1, k+2, \ldots$ dla pewnego k.

Przykład 4. Szereg $\sum_n 1$ jest rozbieżny, bowiem jego n-ta suma częściowa wynosi n. □

Przykład 5. *Szereg harmoniczny* $\sum_n \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. W istocie, niech H_n będzie ciągiem sum częściowych $\sum_n \frac{1}{n}$. Wówczas $H_{2^n} \ge \frac{n}{2}$. W istocie, wzór ten prawdziwy jest dla $n = 0$ i ponadto

$$H_{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \ge \frac{n}{2} + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}.$$

Zatem podciąg (H_{2^n}) ciągu (H_n) jest rozbieżny do nieskończoności, przez co również (H_n) musi być rozbieżny. □

Przykład 6. Szereg geometryczny $\sum_n c\,a^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|a| < 1$. Mamy bowiem (dla $a \ne 1$):

$$\sum_{j=1}^{n} c\,a^j = a\,c\frac{1-a^n}{1-a}$$

(dowód — indukcja względem n). Gdy $|a| < 1$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,a^j = \frac{a\,c}{1-a}.$$

W tym przypadku szereg jest też bezwzględnie zbieżny. □

Przykład 7. W rozdziale o ciągach dowiedliśmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

jest zbieżny. Jest on też bezwzględnie zbieżny, bowiem ciąg sum częściowych szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$ jest oczywiście rosnący i ponadto wobec nierówności:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \le 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = 2 - \frac{1}{n} \le 2$$

jest ograniczony z góry przez 2. □

Przykład 8. Niech $a_1 = -1$, $a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n(n-1)}$. Wówczas:

$$\sum_{j=1}^{n} a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

(dowód — indukcja względem n), a więc szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny. Z drugiej strony

$$|a_n| = \frac{2n-1}{n(n-1)} \ge \frac{1}{n},$$

zatem sumy częściowe $\sum_n |a_n|$ są większe od sum częściowych $\sum_n \frac{1}{n}$. Wobec tego $\sum_n a_n$ nie jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie. Jeśli szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ są zbieżne, to zbieżne są też szeregi $\sum_n c\, a_n$, $\sum_n (a_n + b_n)$ oraz $\sum_n (a_n - b_n)$, i zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności granic ciągów oraz sum uogólnionych. □

Twierdzenie. Jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, to (a_n) oraz ciąg reszt (r_n) szeregu $\sum_n a_n$ są zbieżne do zera.

Dowód. Niech (A_n) będzie ciągiem sum częściowych $\sum_n a_n$. Zbieżność r_n do zera wynika wprost z definicji zbieżności szeregu. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = \Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) - \Big(\lim_{n\to\infty} A_{n-1}\Big) = 0.$$

To dowodzi twierdzenia. □

Twierdzenie (warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu)**.** Szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ istnieje } N \in \mathbf{N} \text{ takie, że jeśli } l \geq k \geq N, \text{ to } \left| \sum_{j=k}^{l} a_j \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Jest to warunek Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych. □

Wniosek (kryterium porównawcze, cz. 1)**.** Jeśli $|a_n| \leq b_n$ dla prawie wszystkich n oraz szereg $\sum_n b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\left| \sum_{j=l}^{l} a_j \right| \leq \sum_{j=k}^{l} |b_j|$$

i skorzystać z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregu. □

Przykład 9. Szereg $\sum_n \frac{1}{n!}$ jest zbieżny, bowiem $\frac{1}{n!} \leq 2^{1-n}$, a szereg geometryczny $\sum_n 2^{1-n}$ jest zbieżny. □

Wniosek. Jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny. □

Twierdzenie. Jeśli $a_n \geq 0$, to $\sum_n a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry. □

Twierdzenie (kryterium porównawcze, cz. 2)**.** Jeśli $a_n \geq b_n \geq 0$ dla prawie wszystkich n oraz $\sum_n b_n$ jest rozbieżny (do nieskończoności), to również $\sum_n a_n$ jest rozbieżny. □

Przykład 10. Szereg $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny, bowiem $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, a szereg harmoniczny $\sum_n \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. □

Twierdzenie (kryterium o zagęszczaniu)**.** Dla każdego nierosnącego ciągu liczb nieujemnych (a_n) i dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$ zachodzi

$$\sum_n a_n \text{ jest zbieżny} \iff \sum_n k^n a_{k^n} \text{ jest zbieżny.}$$

Dowód. Zachodzi $b_j \le a_j \le c_j$, gdzie $b_j = a_{k^{n+1}}$, $c_j = a_{k^n}$ gdy $k^n \le j < k^{n+1}$. Wystarczy zastosować kryterium porównawcze i tożsamości

$$\sum_{j=1}^{k^n-1} b_j = \sum_{i=1}^{n}(k^i - k^{i-1})\, a_{k^i} = \frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n} k^i\, a_{k^i},$$
$$\sum_{j=1}^{k^n-1} c_j = \sum_{i=0}^{n-1}(k^{i+1} - k^{i})\, a_{k^i} = (k-1)\sum_{i=0}^{n-1} k^i\, a_{k^i},$$

które łatwo udowodnić indukcyjnie. □

Przykład 11. Szereg $\sum_n \frac{1}{n^K}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $K > 1$, bowiem szereg zagęszczony $\sum_n 2^n \cdot \frac{1}{2^{Kn}}$ ma tę własność. □

Przykład 12. Szereg $\sum_n \frac{1}{n(\log_2 n)^K}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $K > 1$, bowiem równoważnym warunkiem jest zbieżność zagęszczonego szeregu $\sum_n 2^n \frac{1}{2^n(\log_2 2^n)^K} = \sum_n \frac{1}{n^K}$. □

Twierdzenie (kryterium Cauchy'ego)**.** Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_n a_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to istnieje $K < 1$ takie, że $\sqrt[n]{|a_n|} < K$ dla prawie wszystkich n. Stąd $|a_n| < K^n$ dla prawie wszystkich n i z kryterium porównawczego $\sum_n a_n$ jest zbieżny.

Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to ciąg (a_n) nie jest zbieżny do zera, a więc $\sum_n a_n$ nie może być zbieżny. □

Przykład 13. Szereg $\sum_n \frac{n^K}{2^n}$ jest zbieżny dla dowolnego $K \in \mathbf{R}$. Wynika to z równości $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^K \cdot 2^{-n}} = \frac{1}{2}$. □

Twierdzenie (kryterium d'Alemberta)**.** Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_n a_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Wobec twierdzenia z części dotyczącej ciągów, warunki kryterium d'Alemberta implikują odpowiednie warunki z kryterium Cauchy'ego. □

Przykład 14. Szereg $\sum_n \frac{2^n}{n!}$ jest zbieżny, bowiem $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n\cdot(n+1)!} = 0$. □

Twierdzenie (kryterium Abela)**.** Jeśli ciąg (a_n) jest nierosnący i zbieżny do zera, a ciąg sum częściowych szeregu $\sum_n b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum_n a_n\, b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Niech (B_n) będzie ciągiem sum częściowych $\sum_n b_n$, $B_0 = 0$. Załóżmy, że $|B_n| \le K$. Zachodzi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\,(B_j - B_{j-1}) = a_{n+1}B_n - \sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} - a_j)\, B_j.$$

Ciąg $a_{n+1}B_n$ jest zbieżny do zera, natomiast szereg $\sum_n (a_{n+1} - a_n)\, B_n$ jest bezwzględnie zbieżny:

$$\sum_{j=1}^{n} |(a_{j+1} - a_j)\, B_j| \le K \sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j+1}) = K(a_1 - a_{n+1}) \le K a_1.$$

To dowodzi zbieżności $\sum_n a_n\, b_n$. □

Przykład 15. Szereg $\sum_n \frac{\cos n}{n}$ jest zbieżny, bowiem ciąg sum częściowych

$$\sum_{j=1}^{n} \cos j = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\cos\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

jest ograniczony. Dowód indukcyjny powyższej tożsamości wykorzystuje równość

$$\sin\tfrac{n}{2}\cos\left(\tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{n}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2} = \sin\left(\tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\cos\tfrac{n}{2},$$

którą łatwo można dowieść rozwijając funkcje trygonometryczne sum i różnic kątów. □

Wniosek (twierdzenie Leibniza). Jeśli (a_n) jest nierosnącym ciągiem zbieżnym do zera, to szereg $\sum_n (-1)^n a_n$ jest zbieżny. □

Przykład 16. *Szereg anharmoniczny* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. □

Twierdzenie. Suma szeregu bezwzględnie zbieżnego nie zależy od porządku wyrazów. Inaczej mówiąc, jeśli $b_n = a_{\sigma(n)}$ dla pewnej bijekcji $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, a szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to również $\sum_n b_n$ jest bezwzględnie zbieżny i oba szeregi mają tę samą sumę.

Dowód. Oznaczmy przez A sumę szeregu $\sum_n a_n$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech N będzie tak duże, że $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Niech M będzie największą z liczb $\sigma^{-1}(n)$ dla $n = 1, 2, ..., N$. Wówczas dla $n \geq M$ zachodzi

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_j - A \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{N} a_j - A \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < 2\varepsilon.$$

To dowodzi tezy twierdzenia. □

Twierdzenie (wersja twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). Jeśli $|a_{n,k}| \leq c_n$ dla wszystkich n, k oraz pewnego zbieżnego szeregu $\sum_n c_n$, i ponadto $\lim_{k\to\infty} a_{n,k} = b_n$, to

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Ponieważ $|a_{n,k} - b_n| \leq |a_{n,k}| + |b_n| \leq 2c_n$, więc:

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k} - b_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_{n,k} - b_n| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

Przechodząc do granicy $k \to \infty$ otrzymujemy

$$\limsup_{k\to\infty} |f(x) - f(x_k)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

Ponieważ szereg $\sum_n c_n$ jest zbieżny, liczba po prawej stronie może być dowolnie mała. To dowodzi twierdzenia. □