Mateusz Kwaśnicki

9 Szeregi potęgowe

W tym rozdziale sumujemy szeregi od $n = 0$.

Definicja. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczbowym. **Szeregiem potęgowym** nazywamy funkcję

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n,$$

której dziedziną jest zbiór tych x, dla których szereg definiujący $f(x)$ jest zbieżny.

Twierdzenie. Dziedziną szeregu potęgowego jest $\mathbf{R}$, zbiór jednoelementowy $\{0\}$ lub przedział postaci $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$ lub $[-R, R]$ dla pewnego $R > 0$. We wnętrzu swojej dziedziny szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że $K = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ jest skończona. Wówczas $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \, x^n|} = K \, |x|$, a więc wobec kryterium Cauchy'ego szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny gdy $K \, |x| < 1$, a rozbieżny gdy $K \, |x| > 1$. Zatem jeśli $K = 0$, to dziedziną szeregu potęgowego jest $\mathbf{R}$; jeśli zaś $K > 0$, to dziedziną jest jeden z wymienionych w twierdzeniu przedziałów dla $R = \frac{1}{K}$.

Gdy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, to również $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \, x^n|} = \infty$ dla $x \neq 0$. □

Liczbę R nazywa się **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego.

Przykład 1. Funkcja wykładnicza:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

jest określona dla każdego $x \in \mathbf{R}$, bowiem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. Liczbę $e = \exp(1)$ nazywa się **liczbą Eulera**. □

Przykład 2. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Wówczas f jest określona dla $x \in (-1, 1)$ i $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (suma szeregu geometrycznego).

Przykład 3. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Wówczas f jest określona dla $x \in [-1, 1)$; dla $x = -1$ mamy szereg anharmoniczny. Później zobaczymy, że $f(x) = \log_e(1 - x)$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Wówczas f jest określona dla $x \in [-1, 1]$.

Twierdzenie. Szereg potęgowy $f(x) = \sum_n a_n x^n$ jest ciągły *wewnątrz* swojej dziedziny. Innymi słowy, jeśli $f(x)$ jest zbieżny w przedziale $(-a, a)$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, $g \in (-a, a)$, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(g)$.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej: jeśli $c \in (|x|, a)$, to dla prawie wszystkich k zachodzi $|x_k| \le c$, a więc $|a_n x_k^n| \le |a_n| c^n$, a szereg $\sum_n |a_n| c^n$ jest zbieżny. □

Definicja. Niech $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ będą dowolnymi szeregami. Ich **iloczyn Cauchy'ego** to szereg $\sum_n c_n$, gdzie

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \, b_{n-j}.$$

Twierdzenie. Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_n a_n x^n$ i $\sum_n b_n x^n$ jest szereg $\sum_n c_n x^n$, gdzie $\sum_n c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$.

Dowód. Zachodzi:

$$\sum_{j=0}^{n} (a_j \, x^j) \cdot (b_{n-j} \, x^{n-j}) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \, b_{n-j} \right) x^n = c_n \, x^n,$$

gdzie $\sum_n c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$. □

Twierdzenie. Jeśli $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to ich iloczyn Cauchy'ego $\sum_n c_n$ również jest bezwzględnie zbieżny i

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Dowód. Niech (A_n^*), (B_n^*), (C_n^*) będą ciągami sum częściowych szeregów $\sum_n |a_n|$, $\sum_n |b_n|$, $\sum_n |c_n|$, i niech $g^* = \lim_{n\to\infty} A_n^*$, $h^* = \lim_{n\to\infty} B_n^*$. Wówczas

$$\begin{aligned} C_n^* = \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{i} a_j \, b_{i-j} \right| &\le \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} |a_j| \, |b_{i-j}| = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} |a_j| \, |b_{i-j}| = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} |a_j| \, |b_i| \\ &\le \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |a_j| \, |b_i| = A_n^* \, B_n^* \le g^* \, h^*. \end{aligned}$$

To dowodzi, że $\sum_n c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Ponadto jeśli (A_n), (B_n) i (C_n) są ciągami sum częściowych $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ i $\sum_n c_n$ oraz $g = \lim_{n\to\infty} A_n$, $h = \lim_{n\to\infty} B_n$, to (przekształcając tak, jak poprzednio):

$$|C_n - A_n \, B_n| = \left| \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} a_j \, b_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_j \, b_i \right| = \left| \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} a_j \, b_i \right| \le \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} |a_j| \, |b_i|.$$

Niech $k \approx \frac{n}{2}$. Wówczas:

$$
\begin{aligned}
|C_n - A_n\, B_n| &\le \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=n-j+1}^{n} |a_j|\,|b_i| + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=n-j+1}^{n} |a_j|\,|b_i| \\
&\le \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} |a_j|\,|b_i| + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=0}^{n} |a_j|\,|b_i| = A_k^*\,(B_n^* - B_{n-k}^*) + (A_n^* - A_k^*)\,B_n^*.
\end{aligned}
$$

Istnieje $N(\varepsilon)$ takie, że dla $i, j \ge N(\varepsilon)$ zachodzi $|B_i^* - B_j^*| < \varepsilon$ i $|A_i^* - A_j^*| < \varepsilon$. Zatem

$$
|C_n - A_n\, B_n| \le A_k^*\,(B_n^* - B_{n-k}^*) + (A_n^* - A_k^*)\,B_n^* < (A_k^* + B_n^*)\,\frac{\varepsilon}{g^* + h^*} \le \varepsilon
$$

pod warunkiem, że $k, n-k \ge N(\frac{\varepsilon}{g^*+h^*})$. Oznacza to, że $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n\, B_n)$, co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie (N.H. Abel)**.** Niech $\sum_n a_n$ będzie zbieżnym szeregiem liczbowym i niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$. Wówczas dla dowolnego zbieżnego do 1 ciągu (x_n) liczb mniejszych od 1 zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1)$, tj. funkcja f jest ciągła (lewostronnie) w 1.

Dowód. Zachodzi:

$$
|f(x_n) - f(1)| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(1 - x_n^j) \right|
$$

Niech (A_n) będzie ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_n a_n$, a g granicą tego ciągu. Wówczas $a_n = (A_n - g) - (A_{n-1} - g)$. Korzystając ze wzoru na sumowanie przez części,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} a_j\,(1 - x_n^j) &= (A_k - g)(1 - x_n^{k+1}) - \sum_{j=0}^{k} (A_j - g)\,(x_n^j - x_n^{j+1}) \\
&= (A_k - g)(1 - x_n^{k+1}) - (1 - x_n) \sum_{j=0}^{k} (A_j - g)\, x_n^j.
\end{aligned}
$$

Przechodząc do granicy,

$$
|f(x_n) - f(1)| = (1 - x_n) \left| \sum_{j=0}^{\infty} (g - A_j)\, x_n^j \right|.
$$

Istnieje $N(\varepsilon)$ takie, że $|g - A_j| < \varepsilon$ dla $j \ge N(\varepsilon)$. Zatem:

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{j=0}^{\infty} (g - A_j)\, x_n^j \right| &\le \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)-1} |g - A_j|\, x_n^j + \sum_{j=N(\varepsilon)}^{\infty} |g - A_j|\, x_n^j \\
&\le \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)-1} |g - A_j| + \varepsilon \sum_{j=N(\varepsilon)}^{\infty} x_n^j = \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)-1} |g - A_j| + \varepsilon \frac{\varepsilon}{1 - x_n}\,.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
|f(x_n) - f(1)| \le (1 - x_n) \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)-1} |g - A_j| + \varepsilon
$$

i ostatecznie

$$
\limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(1)| \le \Big(\lim_{n\to\infty} (1 - x_n) \Big) \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)-1} |g - A_j| + \varepsilon = \varepsilon.
$$

Powyższa nierówność zachodzi dla dowolnego $\varepsilon > 0$, przez co $\limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(1)| = 0$. □

Twierdzenie. Jeśli $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ są zbieżne i ponadto ich iloczyn Cauchy'ego $\sum_n c_n$ również jest zbieżny, to:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Dowód. Dla każdego $x \in (-1, 1)$ szeregi $f(x) = \sum_n a_n x^n$ oraz $g(x) = \sum_n b_n x^n$ są bezwzględnie zbieżne, więc szereg $h(x) = \sum_n c_n x^n$ też jest bezwzględnie zbieżny i $h(x) = f(x)\, g(x)$. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie Abela. □

Twierdzenie (A. Tauber)**.** Niech $f(x) = \sum_n a_n x^n$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$ dla wszystkich zbieżnych do 1 ciągów (x_n) liczb mniejszych od 1 i ponadto $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$, to g jest sumą szeregu $\sum_n a_n$.

Dowód. Niech $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Zachodzi:

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j - g\right| \le \left|\sum_{j=0}^{n} (1 - x_n^j)\, a_j\right| + \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\, x_n^j\right| + |f(x_n) - g|\,.$$

Trzeci składnik dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Ponadto dla $n \ge N(\varepsilon)$,

$$\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\, x_n^j\right| \le \frac{\varepsilon}{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} x_n^j \le \frac{\varepsilon}{n} \frac{1}{1 - x_n} = \varepsilon,$$

więc również drugi składnik dąży do zera. Pozostaje oszacować pierwszy składnik:

$$\left|\sum_{j=0}^{n} (1 - x_n^j)\, a_j\right| \le \sum_{j=0}^{n} (1 - x_n^j) |a_j| \le \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} j\, |a_j|;$$

skorzystaliśmy z nierówności Bernoulliego. Ponieważ $(n\, |a_n|)$ dąży do zera, również powyższe wyrażenie (ciąg średnich) dąży do zera. □

Uwaga. J.E. Littlewood udowodnił, że wystarczy założyć, że ciąg $(n\, a_n)$ jest ograniczony.

10 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Zbadamy teraz własności funkcji wykładniczej $\exp(x)$ zdefiniowanej w przykładzie 1.

Twierdzenie. Zachodzi $\exp(x + y) = \exp(x) + \exp(y)$.

Dowód. Wyrazy iloczynu Cauchy'ego szeregów potęgowych $\exp(x)$ i $\exp(y)$ są postaci

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = \frac{(x+y)^n}{n!}\,,$$

czyli iloczynem tych szeregów jest szereg potęgowy $\exp(x + y)$. □

Twierdzenie. Funkcja exp jest ściśle dodatnia i ściśle rosnąca. Ponadto $\exp(x) \ge 1 + x$ dla wszystkich x oraz $\exp(x) \le \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$.

Dowód. Jeśli $0 < x$, to $\exp(0) = 1 < \exp(x)$ wprost z definicji. Na mocy poprzedniego twierdzenia, $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} > 0$, zatem exp jest ściśle dodatnia. Ponadto jeśli $x < y$, to $\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) > 0$. To dowodzi, że exp jest ściśle rosnąca.

Dla $x \ge 0$ zachodzi $\exp(x) \ge 1 + x$ wprost z definicji. Ponadto dla $x \in (-1, 0)$ wyrazy szeregu $\exp(x)$ na przemian zmieniają znak, a ich wartości bezwzględne dążą malejąco do zera. Nierówność $\exp(x) \ge 1 + x$ otrzymamy, łącząc je kolejno w pary — suma każdej pary jest dodatnia. Dla $x \le -1$ nierówność wynika z $\exp(x) > 0$.

Druga nierówność może być otrzymana z pierwszej: $\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} \le (1 - x)^{-1}$, o ile $x < 1$. □

Twierdzenie. Funkcja exp jest ciągła, tj. jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(g)$. Ponadto jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty$, i podobnie jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 0$.

Dowód. Ciągłość szeregów potęgowych jest ogólnym twierdzeniem udowodnionym wcześniej. Gdy (x_n) jest rozbieżny do ∞, to wobec $\exp(x_n) \geq 1 + x_n$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty$. Analogicznie dowodzi się ostatniego stwierdzenia. □

Twierdzenie. Zachodzi

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Dowód. Ze wzoru dwumianowego Newtona,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!n^j} x^j.$$

Zachodzi:

$$0 \leq \frac{1}{j!} - \frac{n!}{j!(n-j)!n^j} = \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{n^j}\right) \leq= \frac{1}{j!}\left(1 - \left(1 - \frac{j}{n}\right)^j\right).$$

Z nierówności Bernoulliego:

$$\left|\frac{1}{j!} - \frac{n!}{j!(n-j)!n^j}\right| \leq \frac{1}{j!} \cdot \frac{j^2}{n}.$$

Ponadto oczywiście $\frac{1}{j!} - \frac{n!}{j!(n-j)!n^j} \leq \frac{1}{j!}$. Wobec tego jeśli $0 < N < n$, to:

$$\begin{aligned}
\left|\exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!} - \frac{n!}{j!(n-j)!n^j}\right) x^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N} \frac{j^2}{n} \cdot \frac{|x|^j}{j!} + \sum_{j=N+1}^{n} \frac{|x|^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \\
&\leq \frac{N^2}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Biorąc granicę $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!}.$$

Ponieważ N jest dowolne, a szereg $\sum_n \frac{|x|^n}{n!}$ jest zbieżny, powyższa granica górna jest równa 0, co kończy dowód twierdzenia. □

Poniższe twierdzenie udowodnimy później.

Twierdzenie (własność Darboux)**.** Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$.

Wniosek. Funkcja exp ma funkcję odwrotną $\exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$. Tę funkcję nazywamy **logarytmem naturalnym** i oznaczamy ln. □

Wniosek. Z własności funkcji exp wynika, że ln jest ściśle rosnąca, $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$, $\ln(x) \leq 1 - x$ oraz $\ln(x) \geq \frac{1}{x} - 1$. □

Twierdzenie. Logarytm naturalny jest funkcją ciągłą.

Dowód. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, $g > 0$, i niech $y_n = \ln(x_n)$. Zachodzi

$$\exp\left(\limsup_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sup\{y_k \ : \ k \geq n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \sup\{\exp(y_k) \ : \ k \geq n\}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \exp(y_k) = \limsup_{n\to\infty} x_k = g.$$

Wobec tego $\limsup_{n\to\infty y_n} = \ln(g)$. Analogicznie postępujemy dla granicy dolnej. □

Funkcje exp i ln pozwalają zdefiniować potęgowanie dla wykładników rzeczywistych. Określamy mianowicie:

$$a^b = \exp(b\ln(a)), \qquad\qquad a > 0, b \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Sprawdzamy indukcyjnie, że zgodnie z tą definicją:

$$a^0 = \exp(0) = 1, \qquad a^{n+1} = \exp(n\ln(a) + \ln(a)) = \exp(n\ln(a)) \cdot \exp(\ln(a)) = a^n \cdot a,$$

a więc definicja (1) jest zgodna z indukcyjną definicją podnoszenia do potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim. Ponadto

$$a^{-b} = \exp(-b\ln(a)) = \frac{1}{\exp(b\ln(a))} = \frac{1}{a^b},$$
$$a^{b+c} = \exp(b\ln(a) + c\ln(a)) = \exp(b\ln(a)) \cdot \exp(c\ln(a)) = a^b \cdot a^c.$$

Możemy teraz udowodnić podane wcześniej twierdzenie o ciągłości potęgowania. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $\lim_{n\to\infty} b_n = h$, $h > 0$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(b_n \ln(a_n)) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} b_n \ln(a_n)\right) = \exp(h\ln(g)) = g^h.$$

Podobnie możemy zdefiniować logarytm o dowolnej podstawie. Skoro

$$a^{\frac{\ln(b)}{\ln(a)}} = \exp\left(\frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \ln(a)\right) = \exp(\ln(b)) = b,$$

więc

$$\log_a b = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

Ponieważ $\ln(e) = 1$, zatem $\ln(x) = \log_e(x)$.

Twierdzenie. Liczba e jest niewymierna.

Dowód. Niech $N > 1$. Zauważmy, że

$$0 < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{N!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{N^{n-N}} = \frac{1}{N!} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{N!} \cdot \frac{1}{N-1},$$

czyli

$$0 < N! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{N-1},$$

Załóżmy, że $e = \frac{k}{N!}$. Wówczas liczba

$$N!\left(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right) = N! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

byłaby całkowita, co jest niemożliwe wobec poprzedniej nierówności. □