Analiza matematyczna 1

Notatki do wykładu

Mateusz Kwaśnicki

11 Asymptotyka

Często interesująca jest nie tyle granica ciągu (a_n), ale szybkość wzrostu a_n wraz z n. W łatwy sposób można to za pomocą tzw. notacji asymptotycznej.

Definicja. Niech (c_n) będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich. Określamy:

$$\begin{aligned}
O(c_n) &= \left\{ (a_n) \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{c_n} < \infty \right\}, \\
\Omega(c_n) &= \left\{ (a_n) \;:\; \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{c_n} > 0 \right\}, \\
o(c_n) &= \left\{ (a_n) \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{c_n} = 0 \right\}, \\
\Theta(c_n) &= \left\{ (a_n) \;:\; \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} < \infty, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} > 0 \right\} = O(c_n) \cap \Omega(c_n).
\end{aligned}$$

Często zamiast $(a_n) \in O(c_n)$ piszemy $a_n = O(c_n)$ itp.

Twierdzenie. Załóżmy, że wyrazy ciągów (a_n) i (b_n) są dodatnie. Wówczas:

$$\begin{aligned}
a_n = o(b_n) &\implies a_n = O(b_n), \\
a_n = \Omega(b_n) &\iff b_n = O(a_n), \\
a_n = O(b_n) &\iff O(a_n) \subseteq O(b_n), \\
a_n = O(b_n) &\iff \frac{1}{b_n} = O\left(\frac{1}{b_n}\right), \\
a_n = o(b_n) &\iff \frac{1}{b_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right), \\
a_n = \Theta(b_n) &\iff a_n = O(b_n) \text{ oraz } a_n = \Omega(b_n), \\
a_n = \Theta(b_n) &\iff b_n = \Theta(a_n), \\
a_n = \Theta(b_n) &\iff \Theta(a_n) = \Theta(b_n), \\
a_n = \Theta(b_n) &\iff a_n = O(b_n) \text{ oraz } b_n = O(a_n).
\end{aligned}$$

Twierdzenie. Zachodzi:

$$a_n = O(c_n) \text{ oraz } b_n = O(d_n) \implies a_n \pm b_n = O(c_n + d_n) \text{ oraz } a_n \cdot b_n = O(c_n \cdot d_n).$$

Ponadto $O(K \cdot c_n) = O(c_n)$. Analogiczne własności mają pozostałe klasy.

Twierdzenie. Zachodzą następujące zawierania:

- jeśli $K < K'$, to $O(n^K) \subseteq O(n^{K'})$;
- jeśli $0 < L < L'$, to $O(L^n) \subseteq O((L')^n)$;
- jeśli $L > 1$, to $O(n^K) \subseteq O(L^n)$;
- jeśli $0 < L < 1$, to $O(L^n) \subseteq O(n^K)$;

- jeśli $K > 0$, to $O((\ln n)^M) \subseteq O(n^K)$;
- jeśli $K < 0$, to $O(n^K) \subseteq O((\ln n)^M)$.

Twierdzenie. Zachodzi:

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \Theta(\ln n),$$

zaś dla $K \neq -1$,

$$\sum_{j=1}^{n} j^K = \Theta(n^{K+1}).$$

Twierdzenie. Zachodzi:

$$n! = \Omega\left(\frac{n^n}{e^n}\right), \qquad n! = \Theta\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\right).$$

12 Ważne granice, szeregi i funkcje

Szereg harmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

oraz **szereg anharmoniczny**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Szereg geometryczny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Funkcja wykładnicza:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Funkcja dzeta Riemanna:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1;$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{80},\ \ldots$$

Wzór Stirlinga:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n} \exp\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k}{k(k-1)} \cdot \frac{1}{n^{k-1}}\right), \qquad (B_n) \text{ — ciąg } \textit{liczb Bernoulliego}.$$

Wzór Wallisa:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}, \qquad 0!! = 1!! = 1,\ k!! = k \cdot (k-2)!!;$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)!(2n-1)!}.$$