imię i nazwisko: M. KWAŚNICKI numer indeksu WZÓR

	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
MAX:	4	4	2	8	4	10	4	4	40

Egzamin z analizy matematycznej 2

1. Korzystając z kryterium Dirichleta zbieżności całki niewłaściwej, udowodnij zbieżność całki $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx.^{(4p)}$

Kryterium Dirichleta: Jeśli f, g - ciągłe na $[a,\infty)$, f - malejąca, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, a g ma ograniczoną f. pierwotną, to (2p)

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx \quad \text{jest zbieżna}$$

Niech $a=0$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $g(x)=\cos x$. Wówczas f,g - ciągłe w $[0,\infty)$, f - maleje (bo np. $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}\le 0$), $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=0$, $\int g(x)\,dx=\int\cos x\,dx=-\sin x+c$ - f. ograniczona. Zatem (2p)

$$\int_0^\infty \cos x\cdot\frac{1}{1+x}\,dx \quad \text{jest zbieżna.}$$

2. Zmieniając kolejność całkowania, oblicz całkę iterowaną $\int_0^1\left(\int_x^1 \exp(\frac{x}{y})\,dy\right)dx.^{(4p)}$

$\exp(\frac{x}{y})$ jest f. nieujemną, więc możemy korzystać z tw. Fubiniego. (0p)

$$\int_0^1\left(\int_x^1 \exp(\tfrac{x}{y})\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1 \exp(\tfrac{x}{y})\cdot \mathbb{1}_{\{x\le y\}}\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1 \exp(\tfrac{x}{y})\,\mathbb{1}_{\{x\le y\}}\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^y \exp(\tfrac{x}{y})\,dx\right)dy= \quad (2p)$$

$$=\int_0^1\left(y\exp(\tfrac{x}{y})\right)_{x=0}^{x=y}dx=\int_0^1 (ye-y)\,dy= \quad (1p)$$

$$=(e-1)\int_0^1 y\,dy=(e-1)\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)_{y=0}^{y=1}=\frac{e-1}{2}. \quad (1p)$$

3. Sformułuj twierdzenie Schwarza o równości pochodnych cząstkowych mieszanych.$^{(2p)}$

Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ istnieją w pewnym otoczeniu punktu (x_0,y_0) i są ciągłe w (x_0,y_0) to $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

(2p)

4. Oblicz pole obszaru $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 < y < x, \ |x^4 - y^4| < \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$.$^{(8p)}$

Stosujemy współrzędne biegunowe:

$x = r\cos t \qquad r > 0$

$y = r\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$ (1p)

jakobian: r

Ponieważ: $0 < y \iff t \in (0, \pi)$

(1p)

$y < x \iff t < \frac{\pi}{4}$ (gdy wiemy już, że $t \in (0,\pi)$)

$$x^4 - y^4 = r^4(\cos^4 t - \sin^4 t) = r^4(\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= r^4 \cdot 1 \cdot \cos 2t, \qquad \cos 2t > 0 \text{ dla } t \in \left(0, \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4r^2\cos^2 t \, r^2\sin^2 t}{(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)} = \frac{r^4 \sin^2 2t}{r^4 \cdot 1} = \sin^2 2t,$$

$$|x^4 - y^4| < \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \iff r^4\cos 2t < \sin^2 2t \iff r < \frac{(\sin 2t)^{\frac{1}{2}}}{(\cos 2t)^{\frac{1}{4}}},$$

(3p)

więc:

$$|D| = \iint_D 1 \, dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{(\sin 2t)^{\frac{1}{2}}}{(\cos 2t)^{\frac{1}{4}}}} r \, dr \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} r^2\right)_{r=0}^{r = \frac{(\sin 2t)^{\frac{1}{2}}}{(\cos 2t)^{\frac{1}{4}}}} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}} \, dt = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos 2t)'}{\sqrt{\cos 2t}} \, dt = -\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\cos 2t}\right)_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\cos 0}\right) = -\frac{1}{4}(-2) = \frac{1}{2}.$$ (3p)

5. Wyznacz długość odcinka wykresu funkcji $y = \cosh(x)$, $-1 \le x \le 1$.$^{(4p)}$

Długość odcinka wykresu funkcji $f(x)$, $a \le x \le b$, dana jest wzorem:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$ (2p)

W naszym przypadku $(\cosh x)' = \sinh x$, $1 + (\sinh x)^2 = (\cosh x)^2$, więc:

$$\ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} \, dx = \int_{-1}^{1} \cosh x \, dx = \left(\sinh x\right)_{x=-1}^{x=1} = \sinh 1 - \sinh(-1) =$$

$$= \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e^1}{2} = e + \frac{1}{e}.$$ (2p)

Inna metoda: $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, $-1 \le t \le 1$, dalej tak samo

6. Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2 - y^2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 1$. (10p)

1. Szukamy ekstremów lokalnych wewnątrz koła: $x^2+y^2<1$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+y^2-2x \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy-2y = 2y(x-1) \end{cases}$$ (2p)

Z drugiego równania albo $x=1$ i wtedy

$0 = 3+y^2-2 = 1+y^2$ – sprzeczność!,

albo $y=0$ i wtedy (2p)

$0 = 3x^2-2x = 3x(x-\frac{2}{3})$, czyli $x=0$ lub $x=\frac{2}{3}$.

Dwa punkty podejrzane: $(x,y)=(0,0)$, $f(x,y)=0$

(oba w kole) $(x,y)=(\frac{2}{3},0)$, $f(x,y)=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=-\frac{4}{27}$.

2. Szukamy ekstremów lokalnych na okręgu: $x^2+y^2=1$

Niech $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi)$. (2p)

$f(x,y) = \cos^3 t + \cos t\sin^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t = \cos t - 1$.

Dla $t\in[0,2\pi)$ mamy wart. największą dla $t=0$ i (2p)
najmniejszą dla $t=\pi$.

Dwa punkty podejrzane: $t=0 \Rightarrow (x,y)=(1,0)$, $f(x,y)=0$

$t=\pi \Rightarrow (x,y)=(-1,0)$, $f(x,y)=-2$

3. Odpowiedź: Wart. największa: 0 (dla $(x,y)=(0,0)$ lub $(x,y)=(1,0)$).

Wart. najmniejsza: -2 (dla $(x,y)=(-1,0)$) (2p)

Inna metoda dla (1),(2),(3): $f(x,y)=(x-1)(x^2+y^2)\leq 0$ (bo $x\leq 1$) oraz
$f(x,y)=(x-1)(x^2+y^2)\geq -2\cdot 1$ (bo $x\geq -1$, $x^2+y^2\leq 1$).

Inna metoda dla (2): mnożniki Lagrange'a; prowadzi do równań:

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-2x+2\lambda x=0 \\ y(x-1+\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

; albo $y=0$ i $x\in\{-1,1\}$, albo $\lambda=1-x$, $y^2=1-x^2 \Rightarrow 1=0$, sprzeczność

7. Sformułuj twierdzenie o dywergencji i oblicz całkę powierzchniową $\oiint_S \vec{F}\circ d\vec{n}$, gdzie S jest powierzchnią sześcianu $-1 \le x, y, z \le 1$, $\vec{n}$ jest zewnętrznie skierowanym wektorem normalnym, zaś $\vec{F}(x,y,z) = (-x+y, y-z, 2z)$.(4p)

Twierdzenie o dywergencji: Jeśli S jest kawałkami gładką powierzchnią, tworzącą brzeg obszaru D, $\vec{n}$ jest zewnętrznym (względem D) wektorem normalnym S, zaś $\vec{F}$ jest polem wektorowym o ciągłych pochodnych cząstkowych w $D \cup S$, to (2p)

$$\oiint_S \vec{F}\circ d\vec{n} = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz$$

S jest kawałkami gładka (6 kwadratów), jest brzegiem sześcianu $D = \{(x,y,z) : -1 \le x,y,z \le 1\}$, $\vec{F}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe, więc

$$\oiint_S \vec{F}\circ d\vec{n} = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(-1+1+2)\,dx\right)dy\right)dz =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = \cancel{8}\ 16.$$ (2p)

(bowiem $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = -1+1+2$

8. Rozwiąż zagadnienie początkowe $f'(t) + t^2 f(t) = t^2$, $f(0) = 0$.(4p)

Mnożymy obie strony równania przez $e^{\int t^2 dt} = e^{\frac{1}{3}t^3}$: (1p)

$$\left(e^{\frac{1}{3}t^3} f(t)\right)' = t^2 e^{\frac{1}{3}t^3}$$ (1p)

$$e^{\frac{1}{3}t^3} f(t) = \int t^2 e^{\frac{1}{3}t^3} dt = \int e^{\frac{1}{3}t^3}\left(\tfrac{1}{3}t^3\right)' dt = e^{\frac{1}{3}t^3} + c$$

Wobec $f(0) = 0$ otrzymujemy $0 = e^0 + c = 1 + c$, czyli $c = -1$.

Zatem: (1p)

$$f(t) = e^{-\frac{1}{3}t^3}\left(e^{\frac{1}{3}t^3} - 1\right) = 1 - e^{-\frac{1}{3}t^3}.$$ (1p)

Inna metoda: rozdzielanie zmiennych, $f'(t) = t^2(1 - f(t))$, $\frac{f'(t)}{1-f(t)} = t^2$,
$-\ln|1 - f(t)| = \frac{1}{3}t^3 + c$; z war. pocz. $c = 0$, więc
$1 - f(t) = e^{-\frac{1}{3}t^3}$, $f(t) = 1 - e^{\frac{1}{3}t^3}$.