imię i nazwisko: .... numer indeksu ....

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Egzamin poprawkowy z analizy matematycznej 2

1. Korzystając z definicji odpowiedniej całki niewłaściwej, uzasadnij, że całka $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ jest rozbieżna.$^{(4p)}$

2. Oblicz objętość bryły $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ :\ (x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2) \le 1\right\}$.$^{(5p)}$

3. Wyznacz długość krzywej $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, $0 \le t \le 2\pi$, gdzie $a \in \mathbf{R}$ jest ustaloną liczbą.$^{(4p)}$

4. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a, wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji $F(x,y) = x + 2y$ przy założeniu, że $2x^2 + y^2 + xy = 1$.$^{(7p)}$

5. Niech $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ gdy $(x,y) \ne (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$. Korzystając z definicji, oblicz pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Uzasadnij, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.$^{(6p)}$

6. Wykorzystując twierdzenie Greena lub definicję całki krzywoliniowej, oblicz całkę $\displaystyle\oint_\Gamma (2y\,dx + 3x\,dy)$, gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu 1.$^{(4p)}$

7. Sformułuj twierdzenie o funkcji uwikłanej (na przykład w wersji wykorzystanej w dalszej części zadania). Uzasadnij, że równanie $x\cos y = y\cos x$ określa w otoczeniu $x = \frac{\pi}{2}$ funkcję uwikłaną $y = f(x)$ taką, że $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Wyznacz $f'(0)$.$^{(6p)}$

8. Znajdź układ fundamentalny rozwiązań równania liniowego $f'''(t) - f''(t) + f'(t) - f(t) = 0$.$^{(4p)}$