imię i nazwisko: ...MATEUSZ KWAŚNICKI... numer indeksu ...WZÓR...

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	5	4	7	6	4	6	4	40

Egzamin poprawkowy z analizy matematycznej 2

1. Korzystając z definicji odpowiedniej całki niewłaściwej, uzasadnij, że całka $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ jest rozbieżna.$^{(4p)}$

$\frac{1}{x\ln x}$ jest f. nieograniczona w otoczeniu $x=0$, dlatego z def.:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx,$$ o ile granica istnieje. (2p)

Podstawiając $\ln x = y$, $\frac{1}{x}\,dx = dy$, otrzymujemy

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c = \ln|\ln x| + c,$$ a więc

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln 2| - \ln|\ln \varepsilon|.$$ (2p)

Gdy $\varepsilon \to 0^+$, to $\ln\varepsilon \to -\infty$, $|\ln\varepsilon| \to \infty$, $\ln|\ln\varepsilon| \to \infty$, więc $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ jest rozbieżna (do $-\infty$)

2. Oblicz objętość bryły $D = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \ : \ (x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)\le 1\}$.$^{(5p)}$

Stosujemy współrzędne biegunowe:

$$x = r\cos t\cos s \qquad r\ge 0$$
$$y = r\cos t\sin s \qquad -\tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{jakobian: } r^2\cos t$$ (2p)
$$z = r\sin t \qquad 0\le s\le 2\pi \qquad x^2+y^2 = r^2\cos^2 t, \quad x^2+y^2+z^2 = r^2$$

Mamy zatem: $(x,y,z)\in D \iff (r^2)^2\, r^2\cos^2 t \le 1 \iff r^6 \le \frac{1}{\cos^2 t}$ (2p)

$$\iff r \le \frac{1}{\sqrt[3]{\cos t}} \qquad (\text{bo } r\ge 0,\ \cos t \ge 0)$$

Wobec tego:

$$|D| = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{\cos t}}} r^2\cos t\,dr\right)dt\right)ds =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\cos t}}\right)^3\cos t\,dt\right)ds = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\,dt\right)ds = 2\pi\cdot\pi\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}.$$ (1p)

Odpowiedź: $|D| = \frac{2\pi^2}{3}$

3. Wyznacz długość krzywej $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, $0 \le t \le 2\pi$, gdzie $a \in \mathbf{R}$ jest ustaloną liczbą.$^{(4p)}$

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{((\cos t)')^2 + ((\sin t)')^2 + ((at)')^2} \, dt = \qquad (3p)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + a^2} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2} \, dt = 2\pi \sqrt{1+a^2} \qquad (1p)$$

Odpowiedź: $2\pi \sqrt{1+a^2}$

4. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a, wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji $F(x,y) = x + 2y$ przy założeniu, że $2x^2 + y^2 + xy = 1$.$^{(7p)}$

Niech $G(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy - 1$. Szukamy ekstremów warunkowych F przy warunku $G = 0$. Zachodzi:

$$\nabla G(x,y) = (\cancel{2}4x + y, 2y + x), \quad \text{więc:}$$

$$\nabla G(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 4x + y = 0,\ 2y + x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0.$$

Ponieważ $G(0,0) = -1 \neq 0$, więc

$$G(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla G(x,y) \neq (0,0).$$

Metoda mnożników Lagrange'a da nam zatem wszystkie ekstrema warunkowe. (0p)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ G = 0 \end{cases}, \text{ tzn. } \begin{cases} 1 + \lambda(4x + y) = 0 \\ 2 + \lambda(2y + x) = 0 \\ 2x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases} \qquad (3p)$$

Z równań 1. i 2.: $0 = \lambda(2y + x) - 2\lambda(4x + y) = -7\lambda x$, zatem:

- $\lambda = 0 \Rightarrow$ sprzeczność w 1. równaniu, lub: (3p)
- $x = 0 \Rightarrow$ z 3.: $y^2 - 1 = 0$, a więc $y = 1$ lub $y = -1$.

Mamy więc (co najwyżej) 2 ekstrema: $F(0,1) = 2$, $F(0,-1) = -2$. (1p)

Odpowiedź: 2 oraz -2.

5. Niech $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ gdy $(x,y)\neq(0,0)$ oraz $f(0,0)=0$. Korzystając z definicji, oblicz pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Uzasadnij, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.$^{(6p)}$

Ponieważ $f(x,y)=0$ gdy $x=0$ lub $y=0$, więc:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0, \qquad (3p)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Gdyby f była różniczkowalna w $(0,0)$, to $f'(0,0)=$

$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0)$ oraz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\overbrace{f(0,0)}^{0}-\overbrace{f'(0,0)\cdot(x,y)}^{0}}{\|(x,y)\|}=0, \quad \text{tzn.:} \qquad (1p)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Ale jeśli $x_n=y_n=\frac{1}{n}$, to $(x_n,y_n)\to(0,0)$, zaś:

$$\frac{x_n^2y_n}{(x_n^2+y_n^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\not\to 0. \qquad (2p)$$

Zatem f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

6. Wykorzystując twierdzenie Greena lub definicję całki krzywoliniowej, oblicz całkę $\oint_\Gamma(2y\,dx+3x\,dy)$, gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu 1.$^{(4p)}$

Niech $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ (parametryzacja Γ). (1p)

$$\oint_\Gamma(2y\,dx+3x\,dy)=\int_0^{2\pi}\left(2\,\cancel{\sin t}\;y(t)\,x'(t)+3\,x(t)\,y'(t)\right)dt= \qquad (2p)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\sin t\,(-\sin t)+3\cos t\,\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2 t-2\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\cos 2t\right)dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi \qquad (1p)$$

(bo $\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt=0$)

Inna metoda: D – koło jednostkowe;

$$\oint_\Gamma(2y\,dx+3x\,dy)=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(3x)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)\right)dx\,dy=\iint_D(3-2)\,dx\,dy=|D|=\pi.$$

7. Sformułuj twierdzenie o funkcji uwikłanej (na przykład w wersji wykorzystanej w dalszej części zadania). Uzasadnij, że równanie $x\cos y = y\cos x$ określa w otoczeniu $x = \frac{\pi}{2}$ funkcję uwikłaną $y = f(x)$ taką, że $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Wyznacz $f'(\cancel{0}\,\frac{\pi}{2})$.$^{(6p)}$

Tw. o funkcji uwikłanej: Jeśli $F(x,y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe, $F(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, to istnieje $\varepsilon>0$ i ciągła funkcja $f:(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ taka, że $F(x,f(x))=0$, $f(x_0)=y_0$. (2p)

Tutaj: $F(x,y)=x\cos y - y\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $y_0=-\frac{\pi}{2}$;

$$F(x_0,y_0)=\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=-x_0\sin y_0-\cos x_0=-\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\neq 0,$$

zatem szukana funkcja f istnieje. Ponadto: (2p)

$$F(x,f(x))=0,\quad \text{więc}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\,f'(x_0)=0.$$

Ponieważ $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\cos y_0+y_0\sin x_0=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$, otrzymujemy $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}f'(x_0)=0$, skąd $f'(\frac{\pi}{2})=1$. (2p)

Odp. $f'(\frac{\pi}{2})=1$

8. Znajdź układ fundamentalny rozwiązań równania liniowego $f'''(t)-f''(t)+f'(t)-f(t)=0$.$^{(4p)}$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0$, tzn. (1p)
$(\lambda-1)\lambda^2+(\lambda-1)=0$, tzn. $(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$, ma
3 pierwiastki: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$. (1p)

Układ fundamentalny tworzą zatem funkcje:

$f_1(t)=e^t$, $f_2(t)=e^{it}$, $f_3(t)=e^{-it}$. (2p)

Biorąc $\frac{1}{2}(f_2+f_3)$ i $\frac{1}{2i}(f_2-f_3)$ zamiast f_2, f_3, otrzymujemy inny układ fundamentalny:

$f_1(t)=e^t$, $\tilde{f}_2(t)=\cos t$, $\tilde{f}_3(t)=\sin t$. (0p)