Imię i nazwisko: ____________________

Numer indeksu: ____________________

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Egzamin z Analizy matematycznej 1
Wrocław, 29 stycznia 2009

(5p) 1. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2e^x+1}{e^x+2+2e^{-x}}dx.$$

Odpowiedź jest postaci log(...) − arctan(...).

(5p) 2. Udowodnij, że

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4.$$

Sformułuj wykorzystane twierdzenia.

(5p) 3. Sformułuj regułę de l'Hospitala dla granic niewłaściwych typu $\frac{\infty}{\infty}$ przy $x \to \infty$. Podaj definicję Heinego granicy funkcji w nieskończoności. Oblicz granicę **ciągu**

$$a_n = \frac{(\ln n)^2}{n},$$

stosując regułę de l'Hospitala dla ilorazu odpowiednich **funkcji**, a następnie korzystając z jednej z definicji granicy funkcji w punkcie.

(5p) 4. Sformułuj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu i wykorzystaj je do udowodnienia zbieżności szeregu $\sum_n \frac{n^n}{(-3)^n\, n!}$.

(5p) 5. Niech A będzie pewnym zbiorem liczb rzeczywistych. Powiemy, że A jest *mały*, jeśli

$$|x-y| < 1 \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in A.$$

Sformułuj definicję kresu dolnego i kresu górnego zbioru. Wykorzystaj je, aby udowodnić, że jeśli A jest mały, to

$$(\sup A) - (\inf A) \leq 1.$$

Wskaż przykład zbioru A, który jest mały (w myśl powyższej definicji) i dla którego

$$(\sup A) - (\inf A) = 1.$$

(5p) 6. *Własność Darboux pochodnej.* Niech f będzie ciągłą funkcją różniczkowalną w przedziale $[a,b]$. Załóżmy, że $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$. Udowodnij, że istnieje liczba $c \in (a,b)$ taka, że $f'(c) = 0$. Sformułuj wszystkie twierdzenia wykorzystane w dowodzie.

Wskazówka: Funkcja f' może nie być ciągła! Zbadaj maksimum f.

Punktacja:

0–14	15–17	18–20	21–23	24–26	27–30
ndst	dst	dst+	db	db+	bdb

Mateusz Kwaśnicki