Egzamin z Analizy matematycznej 1
Wrocław, 29 stycznia 2009

1. Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.$^{(2p)}$ Udowodnij, że ciąg (a_n) dany rekurencyjnie wzorem

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4 \qquad (n \geq 1)$$

jest zbieżny i wyznacz jego granicę.$^{(3p)}$

Rozwiązanie.

- **Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym**: Jeśli ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny, a jego granicą jest kres górny zbioru wyrazów. Jeśli (a_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu, to również jest zbieżny, zaś granicą jest kres dolny zbioru wyrazów.

Nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ jest równoważna nierówności $(a_n - 2)^2 \geq 0$, zawsze prawdziwej. Zatem ciąg a_n jest niemalejący. Gdyby był zbieżny, to granicą (a więc i najmniejszym ograniczeniem górnym) byłaby liczba g spełniająca

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n^2 - 3a_n + 4) = g^2 - 3g + 4.$$

Wobec tego $(g-2)^2 = 0$, czyli $g = 2$. Sprawdźmy więc, czy (a_n) jest ograniczony przez 2.

Oczywiście $a_1 \leq 2$. Załóżmy, że $a_n \leq 2$. Wówczas

$$2 - a_{n+1} = -a_n^2 + 3a_n - 2 = (2 - a_n)(a_n - 1) \geq 0,$$

bowiem $2 - a_n \geq 0$ na mocy założenia indycyjnego, zaś $a_n - 1 \geq a_1 - 1 > 0$ ze względu na to, że (a_n) jest niemalejący. Ostatecznie $a_{n+1} \leq 2$, a więc na mocy zasady indukcji matematycznej (a_n) jest ograniczony z góry przez 2.

Ciąg (a_n) jako monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Jego granica została już wyznaczona wcześniej, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

---

2. Oblicz wartość całki:

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx.^{(3p)}$$

Sformułuj wszystkie wykorzystane twierdzenia.$^{(2p)}$

Rozwiązanie.

- **Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie**: Jeśli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła, $g : [c,d] \to [a,b]$ — różniczkowalna, i ponadto $g(c) = a$, $g(d) = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(y))g'(y)dy.$$

- **Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego**: Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$, a F jest funkcją pierwotną f, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Stosujemy podstawienie $x = y^2$, $dx = 2ydy$, $1 \leq y \leq 2$:

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int_1^2 \frac{2y}{1+y}\, dy = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{1+y}\right) dy = (2y - 2\log(1+y))\Big|_1^2 = 2 - 2\log\frac{3}{2}\,.$$

---

3. Wyznacz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x+(\cos x)^2}\,dx.^{(5p)}$$

Rozwiązanie. Stosujemy podstawienie $\sin x = y$, $\cos x dx = dy$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\sin x+(\cos x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+y+(1-y^2)}\,dy = \int \frac{1}{(2-y)(1+y)}\,dy \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2-y}\,dy + \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+y}\,dy = -\frac{\log|2-y|}{3}+\frac{\log|1+y|}{3}+C \\ &= \frac{1}{3}\log\frac{1+\sin x}{2-\sin x}+C.\end{aligned}$$

---

4. Podaj wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.$^{(2p)}$ Odgadnij wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x)=\ln x$ (np. na podstawie kilku pierwszych pochodnych)$^{(0p)}$ i zapisz rozwinięcie Taylora tej funkcji wokół punktu 1.$^{(1p)}$ Oblicz za jego pomocą przybliżoną wartość $\ln\frac{1}{2}$ z błędem nie przekraczającym $\frac{1}{5}$.$^{(2p)}$

Rozwiązanie.

- **Wzór Taylora**: Jeśli funkcja f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale (a,b) i $x, x_0 \in (a,b)$, to dla pewnego ξ leżącego między x i x_0 zachodzi:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+R_n(x), \qquad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Niech $f(x)=\ln x$. Ponieważ $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, łatwo zauważyć i udowodnić indukcyjnie, że $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}$ $(n\ge 1)$. Stąd $f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n \ge 1)$ oraz:

$$\ln x=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(x-1)^j+R_n(x), \qquad R_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^n}(x-1)^{n+1}$$

dla pewnego ξ między 1 i x. Dla $x=\frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\ln\tfrac{1}{2}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\cdot 2^j}+R_n(\tfrac{1}{2}), \qquad R_n(\tfrac{1}{2})=\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}\xi^n}.$$

Ponieważ $\xi\in(\frac{1}{2},1)$, widzimy, że $|R_n(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{2(n+1)}$. Aby ta liczba była nie większa niż $\frac{1}{10}$, potrzeba $n\ge 4$. Wobec tego,

$$\ln\tfrac{1}{2}\approx-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 8}-\frac{1}{4\cdot 16}=-\frac{131}{192}.$$

---

5. Udowodnij, że istnieje ciąg (σ_n), którego wyrazy są równe 1 lub -1 i taki, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n}{n}=0.^{(5p)}$$

Rozwiązanie. Określamy ciąg (σ_n) indukcyjnie. Niech $S_0=0$. Załóżmy, że dla pewnego n znana jest już wartość S_n. Wówczas określamy $\sigma_{n+1}=1$ jeśli $S_n\ge\frac{1}{n+1}$ oraz $\sigma_{n+1}=-1$ w przeciwnym przypadku. Ponadto określamy $S_{n+1}=S_n+\frac{\sigma_{n+1}}{n+1}$.

W ten sposób określiliśmy jednoznacznie ciąg (σ_n) o wyrazach 1 lub -1. Zauważmy, że ciąg (S_n) jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_n\frac{\sigma_n}{n}$. Ponadto $0\le S_n\le\frac{2}{n}$ dla $n\ge 1$. W istocie, $S_1=1$, $S_2=\frac{1}{2}$, a jeśli $0\le S_n\le\frac{2}{n}$ to albo $S_n<\frac{1}{n+1}$ i wtedy $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}\in[0,\frac{2}{n+1}]$, albo $S_n\ge\frac{1}{n+1}$ oraz $S_{n+1}=S_n-\frac{1}{n+1}\in[0,\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}]\subseteq[0,\frac{2}{n+1}]$ (o ile $n\ge 2$).

Wobec tego ciąg S_n dąży do zera, a zatem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n}{n}=0$.

Mateusz Kwaśnicki