Egzamin z Analizy matematycznej 1
Wrocław, 29 stycznia 2009

(5p) 1. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2e^x + 1}{e^x + 2 + 2e^{-x}} dx.$$

Odpowiedź jest postaci log(...) − arctg(...).

Rozwiązanie. Wpierw stosujemy podstawienie $e^x = y$, $x = \ln y$, $dx = \frac{1}{y}dy$, a następnie $z = y + 1$, $dz = dy$:

$$\int \frac{2e^x + 1}{e^x + 2 + 2e^{-x}} dx = \int \frac{2y + 1}{y^2 + 2y + 2} dy = \int \frac{2z - 1}{z^2 + 1} dz = \int \frac{(z^2 + 1)'}{z^2 + 1} dz - \int \frac{1}{z^2 + 1} dz =$$
$$= \ln(z^2 + 1) - \operatorname{arctg} z + C = \ln(e^{2x} + 2e^x + 2) - \operatorname{arctg}(e^x + 1) + C.$$

(5p) 2. Udowodnij, że

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4.$$

Sformułuj wykorzystane twierdzenia.

Rozwiązanie.

- **Twierdzenie o całkowaniu przez części**: Jeśli f, g są różniczkowalne w swojej dziedzinie i f', g' są ciągłe, to

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

- **Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego**: Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, a F jest funkcją pierwotną f, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Wpierw wyliczamy, całkując dwukrotnie przez części, że

$$\int x^2 \sin x dx = -\int x^2 (\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int (x^2)' \cos x dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x(\sin x)' dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x dx = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x.$$

Wobec tego

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = (2 - \pi^2)\cos \pi + 2\pi \sin \pi - (2 - 0^2)\cos 0 - 2 \cdot 0 \sin 0 = \pi^2 - 4.$$

(5p) 3. Sformułuj regułę de l'Hospitala dla granic niewłaściwych typu $\frac{\infty}{\infty}$ przy $x \to \infty$. Podaj definicję Heinego granicy funkcji w nieskończoności. Oblicz granicę **ciągu**

$$a_n = \frac{(\ln n)^2}{n},$$

stosując regułę de l'Hospitala dla ilorazu odpowiednich **funkcji**, a następnie korzystając z jednej z definicji granicy funkcji w punkcie.

Rozwiązanie.

- **Reguła de l'Hospitala**: Jeśli f, g są funkcjami różniczkowalnymi na (a, ∞) takimi, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ oraz $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje, to $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- **Definicja Heinego granicy funkcji**: Granicą funkcji h w nieskończoności jest liczb g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rozbieżnego do nieskończoności ciągu (x_n) elementów dziedziny h zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Zakładamy tu, że co najmniej jeden taki ciąg istnieje.

Korzystając dwukrotnie z reguły de l'Hospitala, otrzymujemy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Niech $x_n = n$. Z definicji Heinego granicy funkcji otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln x_n)^2}{x_n} = 0.$$

$^{(5p)}$4. Sformułuj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu i wykorzystaj je do udowodnienia zbieżności szeregu $\sum_n \frac{n^n}{(-3)^n\, n!}$.

Rozwiązanie.

- **Kryterium d'Alemberta**: Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_n a_n$ jest (bezwzględnie) zbieżny. Jeśli $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, to szereg ów jest rozbieżny.

Niech a_n będzie n-tym wyrazem rozważanego szeregu. Obliczamy:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wobec tego

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3}.$$

Ponieważ $e < 3$,[1] rozważany szereg jest zbieżny.

$^{(5p)}$5. Niech A będzie pewnym zbiorem liczb rzeczywistych. Powiemy, że A jest *mały*, jeśli

$$|x - y| < 1 \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in A.$$

Sformułuj definicję kresu dolnego i kresu górnego zbioru. Wykorzystaj je, aby udowodnić, że jeśli A jest mały, to

$$(\sup A) - (\inf A) \leq 1.$$

Wskaż przykład zbioru A, który jest mały (w myśl powyższej definicji) i dla którego

$$(\sup A) - (\inf A) = 1.$$

---

[1] Aby wykazać, że $e < 3$, najprościej zauważyć, że $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 3$.

Rozwiązanie.

- **Kresy**: Liczby m i M nazywamy odpowiednio kresem dolnym i kresem górnym zbioru A, jeśli dla wszystkich $x \in A$ zachodzi $m \le x \le M$ i ponadto dla dowolnego $\tilde{m} > m$ istnieje $x \in A$ taki, że $x < \tilde{m}$, zaś dla dowolnego $\tilde{M} < M$ istnieje $x \in A$ taki, że $x > \tilde{M}$.

Niech $m = \inf A$, $M = \sup A$ i ustalmy $\varepsilon > 0$. Na mocy definicji kresów, istnieją $x, y \in A$ takie, że $m < x < m+\varepsilon$ oraz $M-\varepsilon < x < M$. Wobec tego $M-m = (M-\varepsilon)-(m+\varepsilon)+2\varepsilon < y-x+2\varepsilon \le |y-x|+2\varepsilon$. Jeśli A jest mały, to otrzymujemy $M - m < 1 + 2\varepsilon$. Ponieważ ε może być dowolną liczbą dodatnią, otrzymujemy $M - m \le 1$.

Zbiór $A = (0,1)$ jest mały (bo jeśli $x, y \in (0,1)$, to $y - x < 1 - 0 = 1$ i podobnie $y - x > 0 - 1 = -1$) i $\sup A - \inf A = 1 - 0 = 1$.

$^{(5p)}$6. *Własność Darboux pochodnej.* Niech f będzie ciągłą funkcją różniczkowalną w przedziale $[a,b]$. Załóżmy, że $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$. Udowodnij, że istnieje liczba $c \in (a,b)$ taka, że $f'(c) = 0$. Sformułuj wszystkie twierdzenia wykorzystane w dowodzie.
Wskazówka: Funkcja f' może nie być ciągła! Zbadaj maksimum f.

Rozwiązanie — pierwszy sposób.

- **Twierdzenie o pochodnej w ekstremum (Fermata)**: Załóżmy, że f jest określona w otoczeniu liczby c. Jeśli w c funkcja f osiąga ekstremum lokalne i ponadto f jest różniczkowalna w c, to $f'(c) = 0$.
- **Twierdzenie Weierstrassa o ekstremach**: Funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiąga wartość największą i wartość najmniejszą.

Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że dla pewnego $c \in [a,b]$ funkcja f osiąga wartość największą. Gdyby $c = a$, wówczas

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \le \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(a) - f(a)}{\varepsilon} = 0,$$

wbrew założeniu. Analogicznie wykluczamy $c = b$. Wobec tego $c \in (a,b)$ i przez to $f'(c) = 0$.
Rozwiązanie — drugi sposób.

- **Twierdzenie Rolle'a**: Jeśli f jest ciągłą funkcją na przedziale $[a,b]$ różniczkowalną w przedziale (a,b) i ponadto $f(a) = f(b)$, to istnieje liczba $c \in (a,b)$ taka, że $f'(c) = 0$.
- **Wniosek z twierdzenia Darboux**: Jeśli f jest ciągłą i różnowartościową funkcją na przedziale $[a,b]$, to f jest funkcją monotoniczną.[2]
- **Twierdzenie o pochodnej funkcji monotonicznej**: Jeśli f jest funkcją niemalejącą na przedziale $[a,b]$, to $f'(x) \ge 0$ dla wszystkich $x \in [a,b]$.

Jeśli f nie jest różnowartościowa, to $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$ dla pewnych $\tilde{a}, \tilde{b} \in [a,b]$, $\tilde{a} < \tilde{b}$, i wobec tego z twierdzenia Rolle'a wynika, że $f'(c)$ dla pewnego $c \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \subseteq (a,b)$.

Gdyby f nie była różnowartościowa, to byłaby funkcją monotoniczną. Nie mogłaby to być jednak funkcja niemalejąca, bowiem $f'(b) < 0$; z kolei $f'(a) > 0$ wyklucza funkcje nierosnące. To dowodzi, że f nie jest różnowartościowa i kończy rozwiązanie.

Mateusz Kwaśnicki

---

[2]Gdyby tak nie było, to dla pewnych x, y, z mielibyśmy $f(x) < f(y) > f(z)$ lub $f(x) > f(y) < f(z)$. Bez utraty ogólności załóżmy, że zachodzi pierwsza nierówność. Pozostaje skorzystać z tw. Darboux: jeśli $f(x) < f(z)$, to dla pewnego $\tilde{z} \in (x,y)$ zachodzi $f(\tilde{z}) = f(z)$; jeśli $f(x) > f(z)$, to dla pewnego $\tilde{x} \in (y,z)$ zachodzi $f(\tilde{x}) = f(x)$; trzecia możliwość to $f(x) = f(z)$; w każdym przypadku f nie jest różnowartościowa.