„Matematyka" — kolokwium 2

1. Rozważmy łańcuch Markowa z czasem dyskretnym, o trzech stanach, o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

   (a) Niech n_j oznacza średnią liczbę kroków potrzebnych do przejścia ze stanu początkowego j do stanu 3. Uzasadnij, że

$$\begin{cases} n_1 = 1 + p_{11}n_1 + p_{12}n_2 + p_{13}n_3 \\ n_2 = 1 + p_{21}n_1 + p_{22}n_2 + p_{23}n_3 \\ n_3 = 0 \end{cases}$$

   (b) Znajdź wartość n_1, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rozważmy łańcuch Markowa z czasem ciągłym, o dwóch stanach, o generatorze i macierzy przejścia

$$G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}, \qquad P(t) = \begin{pmatrix} p(t) & 1-p(t) \\ 1-q(t) & q(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Przypomnienie: $\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \cdot G$. Ten warunek zadaje pewne równania różniczkowe na $p(t)$ i $q(t)$. Zapisz je.

   (b) Rozwiąż te równania różniczkowe, przy założeniu, że $a, b > 0$. Pamiętaj, że $P(0)$ to macierz jednostkowa.

   (c) Znajdź a i b, jeśli

$$P(1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Wskazówka: jeśli Ci to ułatwi rachunki, $a + b = \ln 6$.

„MATEMATYKA" — KOLOKWIUM 2

1. Rozważmy łańcuch Markowa z czasem dyskretnym, o czterech stanach, o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Niech r_j oznacza prawdopodobieństwo dojścia do stanu 1 przed dojściem do stanu 4. Uzasadnij, że

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = (1-p)r_1 + pr_3 \\ r_3 = qr_2 + (1-q)r_4 \\ r_4 = 0 \end{cases}$$

   (b) Znajdź wartość r_2 i r_3, jeśli $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$.

2. Rozważmy łańcuch Markowa z czasem ciągłym, o dwóch stanach, o generatorze i macierzy przejścia

$$G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}, \qquad P(t) = \begin{pmatrix} 1-p(t) & p(t) \\ q(t) & 1-q(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Przypomnienie: $\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \cdot G$. Ten warunek zadaje pewne równania różniczkowe na $p(t)$ i $q(t)$. Zapisz je.
   (b) Rozwiąż te równania różniczkowe, przy założeniu, że $a, b > 0$. Pamiętaj, że $P(0)$ to macierz jednostkowa.
   (c) Znajdź a i b, jeśli

$$P(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   Wskazówka: jeśli Ci to ułatwi rachunki, $a + b = \ln 6$.