Imię i nazwisko: ______________________________

1	2	3	4	5	$\sum$

Wstęp do logiki i teorii mnogości

Kolokwium 2.

Wrocław, 20 stycznia 2009

1. Niech R będzie relacją na zbiorze liczb całkowitych dodatnich $\mathbf{Z}_+$ daną wzorem
$$a\,R\,b \iff a|b^2.$$
Czy relacja R jest zwrotna?$^{(1p.)}$ Czy jest symetryczna?$^{(1p.)}$ Czy jest przechodnia?$^{(2p.)}$

2. Uzasadnij, że złożenie $R \circ R$, gdzie R jest relacją z poprzedniego zadania, jest dane wzorem:
$$a\,(R \circ R)\,b \iff a|b^4.^{(3p.)}$$
Wyznacz R^{-1}.$^{(1p.)}$

3. Niech f będzie funkcją z X w Y. Udowodnij, że f jest surjekcją (czyli funkcją „na”) wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\text{dla wszystkich } A \subseteq X \text{ zachodzi } Y \setminus f[A] \subseteq f[X \setminus A].^{(4p.)}$$

4. Niech $\sim$ będzie relacją na zbiorze liczba całkowitych $\mathbf{Z}$ daną wzorem
$$a \sim b \iff 3|a^2 - b^2.$$
Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.$^{(2p.)}$ Wyznacz klasy abstrakcji tej relacji.$^{(2p.)}$ (W szczególności należy podać liczbę klas abstrakcji!)

5. Relacja $\prec$ na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ dana jest wzorem
$$A \prec B \iff \big((A \subseteq B) \wedge (B \setminus A \text{ jest skończony})\big).$$
Udowodnij, że $\prec$ jest częściowym porządkiem.$^{(2p.)}$ Znajdź wszystkie elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze i największe w porządku $\prec$.$^{(2p.)}$

Mateusz Kwaśnicki