
KOŁOKWIUM Z TOPOLOGII
7 czerwca 2008

1. Udowodnij, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $E \subseteq X$ jest zbiorem gęstym, a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską ze stałą L , to istnieje funkcja $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzowska ze stałą L i taka, że $\tilde{f}(x) = f(x)$ dla $x \in E$.
2. Udowodnij, że jeśli podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest całkowicie ograniczony, to jego domknięcie \overline{A} też jest całkowicie ograniczone.

3. Czy zbiór funkcji

$$\left\{ \frac{1}{a+x} : a > 0 \right\}$$

jest zwarty w $C(\mathbf{R}_+)$ z metryką supremum? ($\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$)

Ściślej: Niech $f_a : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{a+x}$. Czy zbiór $\{f_a : a > 0\}$ z metryką supremum jest zwarty?

4. Podaj odpowiedzi na poniższe pytania; odpowiedzi nie uzasadniaj.

- (a) Czy przeliczalna suma zbiorów zwartych jest zawsze przestrzenią zupełną?
- (b) Czy każdy homeomorfizm $h : X \rightarrow Y$ można przedłużyć do homeomorfizmu $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, gdzie \tilde{X} i \tilde{Y} są uzupełnieniami X, Y ?
- (c) Czy przestrzeń ciągów $\{0, 1, 2\}^{\mathbf{N}}$ z metryką produktową jest zwarta?
- (d) Czy każda przestrzeń całkowicie ograniczona jest homeomorficzna z podzbiorem kostki Hilberta?
- (e) Czy każda przestrzeń z metryką dyskretną jest zupełna?
- (f) Jaki będzie wynik meczu Polska-Niemcy w niedzielę?

UWAGI: Za każde z zadań 1., 2., 3. można uzyskać 5 punktów. W zadaniu 4. punkt przyznawany jest za każdą poprawną odpowiedź i odejmowany za każdą błędną. Brak odpowiedzi nie jest punktowany. W razie potrzeby wynik kolokwium jest zaokrąglany w górę do najbliższej liczby nieujemnej. Czas pisania — 90 minut.

Powodzenia!

Agata i Mateusz Kwaśniccy