Kolokwium z topologii
29 kwietnia 2008

1. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie ściśle rosnącą funkcją rzeczywistą. Określmy:
$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \ .$$
Niech e oznacza standardową metrykę „moduł różnicy" na $\mathbf{R}$. Udowodnić, że:
    (a) d jest metryką na $\mathbf{R}$;
    (b) f jest ciągła z $(\mathbf{R}, e)$ w $(\mathbf{R}, e)$ wtedy i tylko wtedy, gdy d jest słabsza od e.

Rozwiązanie. Sprawdzamy warunki metryki:

- $d(x, y) \geq 0$, bo moduł jest nieujemny;
- $d(x, y) = 0$ jest równoważne $|f(x) - f(y)| = 0$, czyli $f(x) = f(y)$. Ponieważ f jest ściśle rosnąca, więc jest różnowartościowa. Stąd $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
- $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = d(y, x)$;
- $d(x, y) + d(y, z) = |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \geq |(f(x) - f(y)) + (f(y) - f(z))| = d(y, z)$ na mocy nierówności trójkąta dla modułu.

Ciągłość f oznacza, że jeśli $x_n \to x$ (w e), to $f(x_n) \to f(x)$ (w e). Warunek „d jest słabsza od e" jest równoważny stwierdzeniu, że jeśli $x_n \to x$ w e, to $x_n \to x$ w d. Pozostaje zauważyć, że warunki $f(x_n) \to f(x)$ oraz $x_n \to x$ w d oba są równoważne warunkowi $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ (w e).

Zadanie dodatkowe: Znaleźć warunek równoważny zupełności $(\mathbf{R}, d)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $x_n \to x$ w d wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_n) \to f(x)$ w e. Analogiczna własność zachodzi dla ciągów podstawowych w d.

Jeśli $(\mathbf{R}, d)$ jest przestrzenią zupełną, to dla każdego ściśle rosnącego ciągu ograniczonego (x_n) liczb rzeczywistych, rosnący i ograniczony (a więc zbieżny w e, podobnie jak sam ciąg (x_n)) jest ciąg $(f(x_n))$. W szczególności $(f(x_n))$ jest podstawowy (w e), zatem podstawowy w d jest ciąg (x_n). Niech $x = \lim x_n$ oraz $f(x_n) \to y$, obie granice w e. Wobec monotoniczności f, zachodzi $f(x) \geq f(x_n)$, a więc również $f(x) \geq y$. Ponadto $f(x') > f(x) \geq y$ dla $x' > x$ oraz $f(x') \leq f(x_n) < y$ dla $x' < x$, przy dostatecznie dużym n. Wobec tego jeśli $f(x) \neq y$, to $(f(x_n))$ nie dąży w e do żadnej z wartości $f(x')$, $x' \in \mathbf{R}$, a więc (x_n) nie jest zbieżny w d. To stanowiłoby sprzeczność z zupełnością $(\mathbf{R}, d)$, a więc $f(x) = y$ i wobec tego $f(x_n) \to f(x)$.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągów malejących. Te dwa wyniki dowodzą, że f jest ciągła.

Gdyby f była ograniczona z góry, to istniałby ciąg (x_n) taki, że $f(x_n) \to \sup f$. Ponieważ f nie osiąga kresów (jako funkcja ściśle rosnąca), więc $f(x_n)$ nie dąży do żadnej z wartości $f(x')$, $x' \in \mathbf{R}$, a więc (x_n) nie jest zbieżny w d.

Analogicznie dowodzimy, że f jest nieograniczona z dołu.

Łatwo sprawdzić, że jeśli f spełnia powyższe warunki (jest ciągła i nieograniczona z dołu i z góry), to wówczas metryka d jest zupełna na x. Zatem szukanym warunkiem jest ciągłość f oraz $f(x) \to \pm\infty$ gdy $x \to \pm\infty$.

2. W przestrzeni $C([0,1])$ funkcji ciągłych na $[0,1]$ rozważamy metrykę supremum. Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru:

$$\{f \in C([0,1]) \ : \ f \text{ jest funkcją ściśle rosnącą}\} .$$

Rozwiązanie. Niech A oznacza rozważany zbiór. Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcji ściśle rosnących zbieżnym jednostajnie do f, to dla $x < y$:

$$f(y) - f(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0 ,$$

bowiem każda z liczb $f_n(y) - f_n(x)$ jest dodatnia. Zatem f jest rosnąca w szerszym sensie (niemalejąca). Dlatego $\overline{A}$ zawiera się w zbiorze ciągłych funkcji rosnących w szerszym sensie.

Jeśli f jest funkcją rosnącą w szerszym sensie, to funkcje f_n dane wzorami $f_n(x) = f(x) + \frac{x}{n}$ są ściśle rosnące i zbiegają do f jednostajnie. Dlatego $\overline{A}$ zawierać będzie wszystkie ciągłe funkcje rosnące w szerszym sensie.

Wnętrze A jest zbiorem pustym. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $f \in C([0,1])$ będzie dowolną funkcją. Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ jeśli tylko $|x-y| < \delta$. Określmy $f_\varepsilon(x) = f(x)$ dla $x \geq \delta$ oraz $f_\varepsilon(x) = f(\delta)$. Wówczas $f_\varepsilon \notin A$ oraz $d_{\sup}(f_\varepsilon, f) \leq \varepsilon$. Wobec tego każda funkcja f należy do $\overline{(A^c)}$, a stąd wynika, że wnętrze A jest zbiorem pustym.

3. Rozważmy ciągi (x_n), (y_n) zdefiniowane rekurencyjnie wzorami:

$$(x_0, y_0) = (0,0) , \qquad (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\sin\frac{y_n}{3}, 1 + \frac{x_n + y_n}{3} \right) .$$

Udowodnij, że ciągi (x_n), (y_n) są zbieżne.

Rozwiązanie. Przestrzeń $\mathbf{R}^2$ z metryką taksówkową d jest zupełna. Niech $f(x,y) = (\sin\frac{y}{3}, 1 + \frac{x+y}{3})$. Wówczas:

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(x',y')) &= \left|\sin\frac{y}{3} - \sin\frac{y'}{3}\right| + \left|1 + \frac{x+y}{3} - 1 - \frac{x'+y'}{3}\right| \\ &\leq \left|\frac{y}{3} - \frac{y'}{3}\right| + \left|\frac{x-x'}{3}\right| + \left|\frac{y-y'}{3}\right| \\ &\leq \frac{2}{3}(|x-x'| + |y-y'|) \\ &= \frac{2}{3} d((x,y),(x',y')) . \end{aligned}$$

W drugiej linii skorzystaliśmy z tw. Lagrange'a o wartości średniej i nierówności trójkąta dla modułu. Dowiedliśmy zatem, że f jest odwzorowaniem zwężającym ze stałą Lipschitza $\frac{2}{3}$. Na mocy tw. Banacha, ciąg $(x_n, y_n) = f^{n\circ}((x_0, y_0))$ jest zbieżny do jedynego punktu stałego f.

4. Rozstrzygnąć prawdziwość poniższych zdań. Odpowiedzi nie uzasadniać.

   (a) Każdy zbiór gęsty ma puste wnętrze.

Fałsz. Cała przestrzeń jest gęsta i ma niepuste wnętrze (jest otwarta i niepusta).

(b) Jeśli d jest metryką, to domknięciem $\{y : d(x,y) < r\}$ jest $\{y : d(x,y) \leq r\}$.

Fałsz. Dla metryki dyskretnej d na X, $\{y : d(x,y) < 1\} = \{x\}$ oraz $\{y : d(x,y) \leq 1\} = X$.

(c) Każda funkcja $f : X \to \mathbf{R}$ jest lipschitzowska, jeśli na X rozważamy metrykę dyskretną, a na $\mathbf{R}$ metrykę euklidesową.

Fałsz. Jeśli d jest metryką dyskretną na X, $f : X \to \mathbf{R}$, to f jest lipschitzowska ze stałą C wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi $|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y) \leq C$, czyli gdy f jest ograniczona.

(d) Jeśli d jest metryką, to $d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \leq 2d(p,x) + 2d(p,y) + 2d(p,z)$.

Prawda. Z nierówności trójkąta wynika, że $d(a,b) \leq d(p,a) + d(p,b)$. Dodając takie trzy równości dla (a,b) równych kolejno (x,y), (y,z) i (z,x), otrzymujemy rozważaną nierówność.

(e) Metryki $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ i $d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$ na przestrzeni funkcji ciągłych $C([0,1])$ są równoważne.

Fałsz. Dowodu nie prezentujemy, by umożliwić samodzielne rozwiązanie tego zadania.

Agata i Mateusz Kwaśniccy