

Prawdopodobieństwo i wartość oczekiwana

Lista zadań nr 1: Wprowadzenie

- (1) Idziemy do kasyna i stawiamy 1 zł na pola czerwone. Jeśli wygrywamy, kończymy grę: zarobiliśmy 1 zł. Jeśli zaś przegrywamy, to w drugiej grze podwajamy stawkę: stawiamy 2 zł na pola czerwone. Jeśli tym razem wygrywamy, kończymy grę: odzyskaliśmy utracone w pierwszej grze 1 zł i zarobiliśmy kolejne 1 zł. Jeśli jednak za drugim razem również przegrywamy, w trzeciej grze ponownie podwajamy stawkę, tak, aby w przypadku wygranej odzyskać utracone 3 zł i jeszcze zarobić 1 zł. Po kolejnej przegranej znów podwajamy stawkę; itd.

Prawdopodobieństwo tego, że ani razu w nieskończonym ciągu gier nie wypadnie pole czerwone wynosi zero. Zatem w opisany wyżej sposób z prawdopodobieństwem jeden w końcu wygrywamy złotówką. Dlaczego więc nikt tak nie gra? I jak to się ma do prawdziwego przecież twierdzenia, że (w średniej) kasyno zawsze zarabia?

- (2) Bartek zaproponował Ani następującą grę. Ania rzuca kostką: jeśli wypadnie 1, Ania stawia piwo Bartkowi; jeśli wypadnie 6, Bartek stawia Ani sześć piw; jeśli zaś wypadnie 2, 3, 4 lub 5, stawka się podwaja (tj. stawianych jest odpowiednio dwa i dwanaście piw) i gra toczy się dalej. Gdy znów nie wypadnie 1 ani 6, stawka ponownie się podwaja; itd.

Bartek wylicza bowiem, że jeśli przez x oznaczy średnią wygraną (mierzoną liczbą piw), to $x = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-6) + \frac{4}{6} \cdot 2x$ — bo z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ Bartek zdobywa piwo w pierwszym rzucie, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ traci sześć piw, a z prawdopodobieństwem $\frac{4}{6}$ gra toczy się od nowa, lecz z podwojoną stawką. Wobec tego $x = \frac{5}{2}$, czyli średnio Bartek wygra dwa i pół piwa.

Z kolei Ania o choczko zgadza się na grę, bo przecież po każdym rzucie ma $\frac{1}{6}$ szans na przegraną, ale też $\frac{1}{6}$ szans na sześciokrotnie większą wygraną, więc średnio wygrywa.

Kto ma rację?

- (3) (*Paradoks Monty'ego Halla*, teleturniej *Idź na całość*) Za jednymi z trojga drzwi znajduje się samochód, za pozostałymi — kozy. Gdy wybierzemy drzwi, jedno z pozostałych — takie, za którymi znajduje się koza — zostaną otwarte. Wtedy możemy pozostać przy swojej decyzji lub ją zmienić. Co się bardziej opłaca?
- (4) (*Gra z bogiem*) Bóg wybiera dwie różne liczby całkowite, zapisuje je na kartkach, które następnie wkłada do kopert, a koperty zakleja. Jedną z tych kopert otwiera i pokazuje nam jej zawartość; wybór koperty zależy od wyniku rzutu monetą (jeśli wypadnie orzeł, otwiera pierwszą kopertę, a jeśli reszka — drugą). Naszym celem jest stwierdzenie, czy liczba w zaklejonej kopercie jest większa od tej z koperty otwartej. W jaki sposób powinniśmy grać, aby prawdopodobieństwo wygranej było większe od 50%?

- (5) (*Paradoks dwóch kopert*) Ania rzucała monetą, aż wypadł orzeł. Zanim to się stało, reszka wypadła X razy. Ania włożyła do jednej koperty 3^X zł, zaś do drugiej — 3^{X+1} zł. Koperty zakleiła, a następnie wybrała losowo (rzucając monetą, a jakże) jedną z nich i wręczyła Bartkowi. Bartek otworzył ją i zobaczył, ile jest w niej pieniędzy. Wtedy Ania wyjaśniła mu, co zrobiła z kopertami i zapytała, czy woli zachować tę, którą dostał, czy wymienić ją na drugą. Co powinien zrobić Bartek?
- (6) Test na HIV wykonany u osoby zdrowej daje wynik pozytywny w przypadku ok. 15 osób na 1000. Z kolei test wykonany u osoby chorej daje wynik negatywny u przeciętnie 1 osoby na 1000. W Polsce mniej więcej jedna osoba na tysiąc jest chora na HIV. Wybrany losowo Polak zrobił test i uzyskał wynik pozytywny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest zakażony HIV?
- (7) (*Paradoks Simpsona*) Uniwersytet Kalifornijski w Berkeley został pozwany za dyskryminację kobiet: w 1973 roku przyjęto aż 44% kandydatów na studia, lecz zaledwie 35% kandydatek. Gdy zbadano wyniki na poszczególnych wydziałach, okazało się jednak, że nigdzie kobiety nie były (w ten sposób) dyskryminowane, natomiast w wielu przypadkach przyjęto większy odsetek kandydatek niż kandydatów. Jak to możliwe? Aby to zrozumieć, przeanalizuj dane z wybranych czterech wydziałów:

wydział	kandydaci	przyjęci	kandydatki	przyjęte
A	825	512	108	89
B	560	353	25	17
C	417	138	375	131
D	272	16	341	24
łącznie	2074	1019	849	261