Prawdopodobieństwo i wartość oczekiwana
Lista zadań nr 2: Rachunki

Zmienne o rozkładach absolutnie ciągłych w pigułce:

- X — zmienna losowa
  $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$ — dystrybuanta
  $\varrho_X(x) = F_X'(x)$ — gęstość
- (X, Y) — wektor losowy
  $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y)$ — dystrybuanta
  $\varrho_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ — gęstość
  $\varrho_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{X,Y}(x, y) dy$ — rozkład brzegowy
- $\mathbb{E} f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varrho_X(x) dx$ — wartość oczekiwana
  $\mathbb{E} f(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \varrho_{X,Y}(x, y) dy dx$ — wartość oczekiwana
- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A,B)}{\mathbb{P}(B)}$ — klasyczne prawdopodobieństwo warunkowe
  $F_{X|B}(x) = \frac{\mathbb{P}(X<x,B)}{\mathbb{P}(B)}$ — klasyczna dystrybuanta rozkładu warunkowego
  $\varrho_{X|B}(x) = F_{X|B}'(x)$ — klasyczna gęstość rozkładu warunkowego
- $\varrho_{X|Y=y}(x) = \frac{\varrho_{X,Y}(x,y)}{\varrho_Y(y)}$ — gęstość rozkładu warunkowego
  $F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho_{X|Y=y}(s) ds$ — dystrybuanta rozkładu warunkowego
  $\mathbb{E}(f(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \varrho_{X|Y=y}(x) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \varrho_{X,Y}(x,y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{X,Y}(x,y) dx}$
  — warunkowa wartość oczekiwana
- $Y = f(X)$ (f – rosnąca) $\implies F_Y(y) = F_X(f^{-1}(y))$, $\varrho_Y(y) = \frac{\varrho_X(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))}$
  $Y = f(X)$ (f – malejąca) $\implies F_Y(y) = 1 - F_X(f^{-1}(y))$, $\varrho_Y(y) = \frac{\varrho_X(f^{-1}(y))}{-f'(f^{-1}(y))}$
  $(U, V) = \Phi(X, Y) \implies \varrho_{U,V}(u, v) = \frac{\varrho_{X,Y}(\Phi^{-1}(u,v))}{|\det \Phi'(\Phi^{-1}(u,v))|}$

Ważniejsze rozkłady absolutnie ciągłe:

- Rozkład jednostajny: $\mathcal{U}(a, b)$ $(a < b)$:
  gęstość: $\varrho(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
  dystrybuanta: $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ dla $x \in [a, b]$
  średnia: $\mathbb{E} X = \frac{a+b}{2}$
  wariancja: $\operatorname{Var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Rozkład wykładniczy: $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:
  gęstość: $\varrho(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$
  dystrybuanta: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ dla $x \geq 0$
  średnia: $\mathbb{E} X = \frac{1}{\lambda}$
  wariancja: $\operatorname{Var} X = \frac{1}{\lambda^2}$
- Rozkład normalny: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$:
  gęstość: $\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  dystrybuanta: $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}))$
  średnia: $\mathbb{E} X = \mu$
  wariancja: $\operatorname{Var} X = \sigma^2$

Zadania:

1. (1) Niech X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0,1)$. Oblicz (podane wyżej) wartości $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var} X = \frac{1}{12}$.
2. (2) Niech X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Oblicz (podane wyżej) wartości $\mathbb{E}X = 0$, $\operatorname{Var} X = 1$.
3. (3) Uzasadnij, że jeśli $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, to $a + (b-a)X \sim \mathcal{U}(a,b)$.
4. (4) Uzasadnij, że jeśli $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $\mu + \sigma X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
5. (5) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Wyznacz gęstość i dystrybuantę rozkładu $Z = \min(X,Y)$ za pomocą F_X i ϱ_X. Wyznacz te wielkości, gdy $X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ i zinterpretuj uzyskany wynik w kontekście rozpadu promieniotwórczego.
6. (6) Wykonaj poprzednie zadanie, jeśli X i Y są niezależne, ale mają różne rozkłady. Rozważ przypadek $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$ i zinterpretuj wynik.
7. (7) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{E}(\lambda)$. Wyznacz rozkład łączny wektora $(X, X+Y)$, a następnie rozkład warunkowy X pod warunkiem $X+Y=z$ (czyli np. $\varrho_{X|X+Y=z}$).
8. (8) Niech X będzie zmienną o rozkładzie $\mathcal{E}(\lambda)$. Wyznacz rozkład warunkowy zmiennej $X - x_0$ pod warunkiem $X > x_0$.
9. (9) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznacz rozkład łączny wektora $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y, X+Y)$.
10. (10) Niech U, V będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$. Wyznacz rozkład łączny i rozkłady brzegowe wektora $(X,Y) = (\sqrt{2\ln\frac{1}{U}}\cos(2\pi V), \sqrt{2\ln\frac{1}{U}}\sin(2\pi V))$.
11. (11) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznacz rozkład zmiennej $Z = X^2 + Y^2$ (czyli np. $F_Z(r)$).
12. (12) Niech $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ oraz $Y = \frac{1}{\sqrt{X}}$. Wyznacz rozkład Y oraz $\mathbb{E}(Y - y_0 | Y > y_0)$ dla $y_0 \geq 1$.