

Łańcuchy Markowa z czasem ciągłym

Lista zadań nr 4

- (1) W bardzo krótkim czasie Δt komórka dzieli się na dwie komórki z prawdopodobieństwem $q \Delta t$ (proces Yule'a). Na początku jest jedna komórka. Oblicz prawdopodobieństwo, że po czasie t jest (a) wciąż jedna komórka; (b) dwie komórki; (c) trzy komórki; (d) n komórek.
- (2) Niech $m(t)$ oznacza wartość oczekiwaną liczby komórek po czasie t . Uzasadnij wzór $m'(t) = qm(t)$ i wyznacz wartość $m(t)$.
- (3) Niech $M(t)$ oznacza wartość oczekiwaną kwadratu liczby komórek po czasie t . Uzasadnij wzór $M'(t) = 2qM(t) + qm(t)$ i wyznacz wartość $M(t)$. Korzystając z tego wyniku, oblicz wariancję liczby komórek po czasie t .
- (4) Wykonaj poprzednie zadania w przypadku, gdy na początku jest k komórek.
- (5) Cząstka przeskakuje między trzema stanami (1, 2, 3) z jednakową intensywnością 1. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w czasie t .
- (6) Wyznacz wartość oczekiwaną czasu przejścia ze stanu 1 do stanu 2.
- (7) Wykonaj poprzednie zadanie dla łańcucha Markowa o generatorze

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (8) (*Kolejka M/M/1*) Zlecenia przychodzą z intensywnością μ , a wykonywane są z intensywnością λ , gdzie $\lambda > \mu$. Wyznacz średni czas opróżnienia kolejki zleceń, gdy na początku było ich k .
- (9) Zebrano dwie próbki materiału. Pierwsza składa się z 50% z materiału A , w 25% z materiału B i w 25% z materiału C . Druga składa się z materiałów A , B i C w tej samej ilości. Materiał A jest promieniotwórczy i rozpada się w materiał B z intensywnością 1. Materiał B również jest promieniotwórczy i rozpada się w materiał C z intensywnością 2. Z kolei materiał C jest stabilny. Wykaż, że pierwsza próbka mogła powstać z materiału składającego się wyłącznie z substancji A , zaś druga — nie.