Proces Wienera
Lista zadań nr 6

W poniższych zadaniach W_t jest procesem Wienera, zaś $X_t = x_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \mu t)$ — geometrycznym ruchem Browna. Przypomnienie: $\mathbb{E}X_t = e^{\mu t} x_0$. Jeśli nie podano inaczej, zakładmy, że $\sigma = 1$ oraz $\mu = 0$, a więc $X_t = x_0 \exp(W_t - \frac{t}{2})$

(1) Korzystając z niezależności przyrostów procesu Wienera, oblicz $\mathbb{P}(W_7 > W_3 > W_0)$.

(2) Zauważ, że

$$X_7 = \exp(W_3 - \tfrac{3}{2}) \exp((W_7 - W_3) - \tfrac{7-3}{2}).$$

Oblicz $\mathbb{P}(X_7 > X_3 > X_0)$ i spróbuj wyjaśnić, dlaczego wynik nie jest równy $\frac{1}{4}$ mimo, że X_t opisuje grę, w której gracz średnio wychodzi na zero.

(3) Przypomnij charakteryzację niezależności przez gęstość rozkładu łącznego. Wykaż, że jeśli Y i Z są niezależne, to $\mathbb{E}(f(Y)g(Z)|Y = y) = f(y)\mathbb{E}(g(Z))$.

(4) Wykorzystując poprzednie zadanie i równość

$$X_7 = \exp(W_3 - \tfrac{3}{2}) \exp((W_7 - W_3) - \tfrac{7-3}{2}),$$

oblicz warunkowe wartości oczekiwane $\mathbb{E}(X_7|X_3 = x)$ i $\mathbb{E}(X_7^2|X_3 = x)$.

(5) Ile (na mocy mocnego prawa wielkich liczb) wynosi granica

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t}\,?$$

A ile wobec tego wynosi granica

$$\lim_{t\to\infty} X_t?$$

Jak to się ma do stwierdzenia, że X_t opisuje grę sprawiedliwą?

(6) Określmy $V_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$, $V_0 = 0$. Uzasadnij, że V_t również jest procesem Wienera.

(7) Określmy $U_t = W_{7+t} - W_7$. Uzasadnij, że U_t również jest procesem Wienera.

(8*) Niech T będzie najmniejszą taką liczbą, że $W_T = 7$ (T jest zmienną losową). Dla $s > 0$ oblicz $\mathbb{P}(T < s)$.

Wskazówka: zrób rysunek przykładowej trajektorii procesu Wienera i zaznacz T na osi czasu. Zauważ, że jeśli $T < s$, to po chwili T proces W_t ma jednakową szansę pójść w górę i w dół; zatem $\mathbb{P}(W_s > W_T | T < s) = \frac{1}{2}$ — ten intuicyjny fakt (tzw. zasada odbicia) jest trudny do udowodnienia, ale możesz go wykorzystać. Wywnioskuj, że $\mathbb{P}(W_s > 7) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T < s)$.

Uwaga: spróbuj uogólnić powyższe zadania, pisząc s zamiast 3 oraz t zamiast 7.