

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

LISTA ZADAŃ NR 10

ZASTOSOWANIA POCHODNYCH

Rozgrzewka

1. Wyznacz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

2. Znajdź ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x, \quad g(x) = x - 3\sqrt[3]{x}, \quad h(x) = xe^{-3x}.$$

3. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$.

4. Dla jakiej miary kąta przy wierzchołku A trójkąta równoramiennego ABC ($|AB| = |AC|$) o polu 1 obwód tego trójkąta jest najmniejszy?

5. Uzasadnij tożsamość:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ćwiczenia

1. Wyznacz granice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \right), & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}. \end{aligned}$$

2. Znajdź ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:

$$f(x) = |x^3 - 30x^2 + 225x|, \quad g(x) = \frac{x}{\ln x}, \quad h(x) = x(\ln x)^2.$$

3. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$.

4. (a) Dla jakiej miary kąta przy wierzchołku A trójkąta równoramiennego ABC ($|AB| = |AC|$) o polu 1 promień okręgu wpisanego w to koło jest największy?

- (b) Koszt wykonania metra kwadratowego podstawy (dolnej lub górnej) pojemnika o kształcie walca to 1 zł. Koszt metra kwadratowego powierzchni bocznej wynosi 2 zł. Zaprojektuj najtańszy pojemnik o kształcie walca, który ma objętość 8π .

- (c) Prostokątne pole o powierzchni 1 ma przylegać do rzeki. Jakie powinny być jego wymiary, by koszt ogrodzenia był możliwie najmniejszy? Oczywiście pola nie trzeba ogradzać od strony rzeki.

5. Uzasadnij tożsamości:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, & \quad x \in \mathbf{R}, \\ \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, & \quad x \in (-1, \infty). \end{aligned}$$

6. Określić przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = \ln(1+x^2), \quad g(x) = e^{\operatorname{arctg} x}, \quad h(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$