Analiza matematyczna 1
lista zadań nr 1
indukcja matematyczna

- W poniższych zadaniach n jest liczbą całkowitą dodatnią.
- „Udowodnij” znaczy „Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej”.

Rozgrzewka

1. Udowodnij, że

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Udowodnij, że liczba $10^n - 1$ jest podzielna przez 9.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ zachodzi

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2.$$

Ćwiczenia

1. Udowodnij, że

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n},$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1}.$$

2. Udowodnij, że liczba $2^n - (-1)^n$ jest podzielna przez 3, a liczba $10^n - 4^n$ — przez 6.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2^n}$ zachodzi *nierówność Cauchy'ego*:

$$\sqrt[2^n]{a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{2^n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2^n}}{2^n}.$$

Wskazówka: podziel liczby na dwie równoliczne grupy.

4. Udowodnij *nierówność Bernoulliego*: dla każdej liczby rzeczywistej $a \geq -1$ zachodzi

$$(1+a)^n \geq 1 + n\,a.$$

5. Przypuśćmy, że w łamigłówce *wieże z Hanoi* (podanej na wykładzie) zabronione jest przenoszenie krążków z jednego skrajnego pręta na drugi skrajny pręt. Pozostałe reguły pozostają niezmienione. Ile ruchów trzeba wykonać, by przenieść całą wieżę?

6. (a) Udowodnij, że $2^n > n$.

   (b) Udowodnij, że $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b.

7. Udowodnij, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}, \qquad k \geq 0,\ n \geq 0.$$

8. Przed nami leży w rzędzie n kartek, na każdej napisana jest liczba rzeczywista. Rozważmy następujący *algorytm* sortowania tych karteczek. Jeśli $n = 1$, to nie robimy nic. Jeśli $n > 1$, to:
   - odkładamy jedną (dowolną) kartkę na bok;
   - sortujemy (opisanym właśnie algorytmem) pozostałych $n - 1$ karteczek;
   - porównujemy liczbę z odłożonej kartki kolejno z liczbami na posortowanych już kartkach i w odpowiednim miejscu wstawiamy odłożoną kartkę.

   Niech a_n oznacza maksymalną możliwą liczbę wykonanych porównań. Zauważ, że w ostatnim kroku (wstawianiu) wykonywanych jest co najwyżej $n - 1$ porównań. Zapisz równanie rekurencyjne dla a_n, odgadnij zwarty wzór na a_n i udowodnij go indukcyjnie.

Odpoczynek

1. (a) Udowodnij, że

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (k+1) + ... + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot ... \cdot (n+k-1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot ... \cdot (n+k)}{k+1}$$

   (b) Rozważmy sumę

$$a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

   Wówczas $a_{n+1} - a_n = n^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej n. Można zatem przypuszczać, że a_n jest wielomianem stopnia czwartego, tj.

$$a_n = p\,n^4 + q\,n^3 + r\,n^2 + s\,n + t.$$

   Wyznacz współczynniki p, q, r, s, t. Czy potrafisz przeprowadzić podobne rozumowanie dla innych wykładników niż 3?

2. Udowodnij, że liczba $3^{2^n} - 1$ jest podzielna przez 2^n.

3. Udowodnij nierówność Cauchy'ego w pełnej ogólności: dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ zachodzi

$$\sqrt[n]{a_1\,a_2\,a_3\,...\,a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}.$$

   Wskazówka: wykorzystaj ćwiczenie 3.

8. Przeprowadź analizę podobną do tej z ćwiczenia 8. dla nieco zmodyfikowanego algorytmu sortowania:
   - dzielimy kartki na dwie możliwie równoliczne grupy;
   - sortujemy (opisanym właśnie algorytmem) każdą z grup osobna;
   - scalamy posortowane grupy.

   Wskaż metodę scalania, która wymaga co najwyżej $n-1$ porównań. Przyjmijmy dla uproszczenia, że n jest potęgą 2. Zapisz równanie rekurencyjne dla liczby porównań wykonanych przez ten algorytm, odgadnij rozwiązanie i udowodnij je indukcyjnie.
   Wskazówka: rozwiązanie to .

Mateusz Kwaśnicki