# Analiza matematyczna 1

lista zadań nr 2

liczby rzeczywiste

## Rozgrzewka

1. Niech $A = \left\{\frac{n}{n+1} \;:\; n \in \mathbf{N}\right\}$. Sprawdź, czy $A$ jest ograniczony z dołu i z góry, czy ma element najmniejszy i największy, i wyznacz $\inf A$ oraz $\sup A$.

2. Udowodnić, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

3. Wyprowadzić wzór na rozwiązanie równania kwadratowego.

## Ćwiczenia

1. Niech $A = \{2^n \;:\; n \in \mathbf{Z}\}$. Sprawdź, czy $A$ jest ograniczony z dołu i z góry, czy ma element najmniejszy i największy, i wyznacz $\inf A$ oraz $\sup A$.

2. Udowodnić, że $\sqrt{6}$ oraz $\sqrt[3]{2}$ są liczbami niewymiernymi.

3. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego wywnioskować, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ zachodzi
$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2 \leq n\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2).$$

## Odpoczynek

1. Zbadać jak w ćwiczeniu 1. zbiory
$$A = \left\{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \;:\; a,b,c \in \mathbf{N}\right\},$$
$$B = \left\{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \;:\; a,b,c \in \mathbf{N}\right\},$$
$$C = \left\{\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \;:\; a,b,c \in \mathbf{N}\right\}.$$

2. (a) Udowodnić, że $\sqrt[n]{k}$ $(k, n \in \mathbf{N})$ jest albo liczbą naturalną, albo liczbą niewymierną.
   (b) Udowodnić, że liczbami niewymiernymi są $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ oraz $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$.

3. **Konstrukcja Dedekinda liczb rzeczywistych.**

   *Przedziałem Dedekinda* nazywamy dowolny podzbiór $A \subseteq \mathbf{Q}$ o następujących własnościach:

   - jeśli $a, b \in \mathbf{Q}$, $a < b$ oraz $b \in A$, to również $a \in A$;
   - $A$ nie zawiera elementu największego.

   Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich przedziałów Dedekinda. Dla $A, B \in \mathcal{R}$ określamy:
$$A < B \iff A \neq B \text{ oraz } A \subseteq B;$$
$$A + B = \{a + b \;:\; a \in A,\, b \in B\};$$
$$A \cdot B = \begin{cases} \{a \cdot b \;:\; a \in A,\, b \in B,\, b > 0\} & \text{gdy } 0 \in B, \\ \{q - c \;:\; q < 0,\, c \notin \{a \cdot b \;:\; a \in A,\, b \in B\}\} & \text{gdy } 0 \notin B. \end{cases}$$

   Sprawdź, że tak określone działania i relacja bycia mniejszym spełniają wszystkie postulaty liczb rzeczywistych. Wskazówki:

- zeru odpowiada $\{q \in \mathbf{Q} \, : \, q < 0\}$, jedyncie — $\{q \in \mathbf{Q} \, : \, q < 1\}$;
- elementem przeciwnym do $A$ jest $(-A) = \{q - a \, : \, q < 0, \, a \in A\}$;
- elementem odwrotnym jest $A^{-1} = \{q \in \mathbf{Q} \, : \, q \le 0\} \cup \{a^{-1} \, : \, a \in A, \, a > 0\}$ gdy $0 \in A$ oraz $A^{-1} = \{a^{-1} \, : \, a \in A\}$ gdy $0 \notin A$;
- zanim sprawdzisz łączność mnożenia etc., udowodnij, że $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$; pozwoli to istotnie zredukować liczbę przypadków;
- kresem górnym rodziny $\mathcal{A}$ przedziałów Dedekinda jest suma tej rodziny, $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$;
- kres dolny rodziny $\mathcal{A}$ można zdefiniować za pomocą kresu górnego i negacji.

Mateusz Kwaśnicki