Analiza matematyczna 1

lista zadań nr 4

przestrzenie metryczne

- W poniższych zadaniach d oznacza pewną metryką na zbiorze X.

Rozgrzewka

1. *Typowe metryki.* Udowodnij, że metrykami są:
   (a) **metryka dyskretna**: funkcja $d : X \times X \to [0, \infty)$, $d(x, y) = 0$ gdy $x = y$, $d(x, y) = 1$ gdy $x \neq y$ (X — dowolny zbiór);
   (b) **metryka samolotowa**: niech X będzie zbiorem polskich miast z lotniskami, $\mathrm{lot}(x)$ oznacza długość lotu z miasta x do Warszawy i niech $d : X \times X \to [0, \infty)$,
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = y \\ \mathrm{lot}(x) & \text{gdy } x \neq \text{„Warszawa”},\ y = \text{„Warszawa”} \\ \mathrm{lot}(y) & \text{gdy } x = \text{„Warszawa”},\ y \neq \text{„Warszawa”} \\ \mathrm{lot}(x) + \mathrm{lot}(y) & \text{gdy } x \neq \text{„Warszawa”},\ y \neq \text{„Warszawa”},\ x \neq y. \end{cases}$$
2. Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnych punktów $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ $(n \geq 2)$ zachodzi
$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

Ćwiczenia

1. *Typowe metryki.* Udowodnij, że metrykami są:
   (a) **metryka „maksimum”**: funkcja $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$,
$$d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|);$$
   (b) **metryka „suma”** lub **metryka taksówkowa**: funkcja $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$,
$$d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|.$$
2. Udowodnij, że $|d(p, q) - d(r, s)| \leq d(p, r) + d(q, s)$.
3. **Odległość punktu od zbioru**. Niech $d(x, A) = \inf\{d(x, z) : z \in A\}$ dla dowolnych $x \in X$, $A \subseteq X$. Udowodnij, że
$$d(x, y) \geq |d(x, A) - d(y, A)|.$$
   Podaj przykład dowodzący, że nie musi zachodzić wzór
$$d(x, y) \leq d(x, A) + d(y, A).$$

Odpoczynek

1. *Typowe i nietypowe metryki.* Udowodnij, że metrykami są:
   (a) funkcja $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$,
$$d((a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n)) = (|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p + ... + |a_n - b_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$
   gdzie $p \in [1, \infty)$. Czym jest d, gdy $p = 1$, $p = 2$, $p \to \infty$?

(b) **metryka „supremum"**: funkcja $d : X \times X \to [0, \infty)$, gdzie X jest zbiorem ograniczonych funkcji rzeczywistych o dziedzinie A, dana wzorem

$$d(f, g) = \inf \{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in A\} \,;$$

(c) funkcja $d : X \times X \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, gdzie $f : X \to \mathbf{R}$ jest funkcją różnowartościową;

(d) funkcja $d : X \times X \to [0, \infty)$, gdzie $X = \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbf{Q}\}$, dana wzorem

$$d(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) = |a - c| + |b - d| \,;$$

(e) funkcja $d : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0, \infty)$ dana wzorem

$$d(k, l) = \log \frac{\mathrm{NWW}(k, l)}{\mathrm{NWD}(k, l)}$$

(0 nie jest liczbą naturalną!).

2. Załóżmy, że d_1 i d_2 są metrykami na X.

   (a) Udowodnij, że funkcja $d_{\max}(x, y) = \max(d_1(x, y), d_2(x, y))$ również jest metryką na X.

   (b) Udowodnij, że funkcja $d_{\min}(x, y) = \min(d_1(x, y), d_2(x, y))$ nie musi być metryką na X.

   (c) Udowodnij, że

   $$d_{\inf}(x, y) = \inf \{d_{\min}(z_1, z_2) + d_{\min}(z_2, z_3) + ... + d_{\min}(z_{n-1}, z_n) \ : \ z_1 = x,\, z_n = y\}$$

   spełnia warunek trójkąta i warunek symetrii, ale nie musi spełniać warunku tożsamości.

   Jakie są interpretacje $d_{\max}$, $d_{\min}$, $d_{\inf}$, gdy d_1 to czas jazdy autobusem, a d_2 — czas jazdy koleją?

3. Niech d będzie metryką euklidesową na $\mathbf{R}^n$. Niech X oznacza rodzinę domkniętych[1], niepustych i ograniczonych[2] podzbiorów $\mathbf{R}^n$. Określmy

$$d_{\inf}(A, B) = \inf \{d(x, y) \ : \ x \in A,\, y \in B\} \,,$$
$$d_{\sup}(A, B) = \sup \{d(x, y) \ : \ x \in A,\, y \in B\} \,,$$
$$d_H(A, B) = \max\Bigl(\sup\bigl\{\inf\{d(x, y) : y \in B\} \ : \ x \in A\bigr\},\ \sup\bigl\{\inf\{d(x, y) : x \in A\} \ : \ y \in B\bigr\}\Bigr).$$

Udowodnij, że $d_{\inf}$ i $d_{\sup}$ (niemal) nigdy nie są metrykami, zaś d_H jest metryką. Jest to tzw. **odległość Hausdorffa**.

Mateusz Kwaśnicki

[1] Zbiór A nazywamy domkniętym, jeśli granica dowolnego zbieżnego ciągu elementów A należy do A.

[2] Zbiór A nazywamy ograniczonym, jeśli zbiór liczb $\{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}$ jest ograniczony z góry.