

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

## LISTA ZADAŃ NR 5 ZBIEŻNOŚĆ CIĄGÓW

### Rozgrzewka

1. Udowodnij, że ciąg zbieżny jest podstawowy.
2. Udowodnij, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
3. Niech  $K \in (0, 1)$ . Określmy  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = (1 - K)a_n + 1$ . Do czego dąży  $(a_n)$ ?
5. Wyznacz granice podanych niżej ciągów.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}, \quad c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}.$$

6. Wyznacz granice (właściwe lub nie) podanych niżej ciągów.

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad b_n = \frac{2^n}{n!}, \quad c_n = \sqrt[n]{n!}.$$

### Ćwiczenia

1. Udowodnij, że ciąg podstawowy, który zawiera podciąg zbieżny, jest zbieżny.
2. Udowodnij, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$ .
3. Niech  $K \in (0, \infty)$ . Określmy  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{K}{2a_n}$ . Czy  $(a_n)$  jest zbieżny? Do czego?
4. Ciąg dany rekurencyjnie wzorami  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  jest oczywiście rosnący. Czy jest ograniczony?
5. Wyznacz granice podanych niżej ciągów.

$$a_n = \frac{n^2 2^n + 3^n}{3^{n+1} - 2^n}, \quad b_n = n \left( \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} - \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \right), \quad c_n = \sqrt[n]{|3^n - 10 \cdot 2^n|}.$$

6. Wyznacz granice (właściwe lub nie) podanych niżej ciągów.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^K}{L^n}, & K > 0, L > 1; \\ b_n &= \frac{L^n}{n!}, & L > 0; \\ c_n &= \frac{n!}{n^n}. & \text{Wskazówka: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

7. Znajdź wszystkie ciągi geometryczne  $(a_n)$  spełniające równanie rekurencyjne ciągu Fibonacciego, tj.  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Dodaj do siebie dwa takie ciągi tak, aby otrzymać ciąg Fibonacciego  $(F_n)$ .
8. Na podstawie jawnego wzoru uzyskanego w poprzednim ćwiczeniu wyznacz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ .

### Odpoczynek

1. Udowodnij, że ciąg jest zbieżny do  $g$  wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego podciągu można wybrać podciąg zbieżny do  $g$ .
3. Oszacuj szybkość zbieżności ciągu do granicy w rozgrzewce 3. oraz w ćwiczeniu 3.

4 Udowodnij, że jeśli ciąg  $(a_n)$  spełnia warunek  $a_{k+l} \leq a_k + a_l$  dla wszystkich  $k, l \in \mathbf{N}$  (takie ciągi nazywamy **podaddytywnymi**), to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

w szczególności granica po lewej stronie (właściwa lub niewłaściwa  $-\infty$ ) istnieje.

7. *Własności ciągu Fibonacciego.* Niech  $(F_n)$  będzie ciągiem Fibonacciego. Udowodnij, że:

- $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;
- $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ ;
- $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ;
- $F_{k+l} = F_k F_{l+1} + F_{k+1} F_l$ ;
- $\text{NWD}(F_k, F_l) = F_{\text{NWD}(k,l)}$ .

Mateusz Kwaśnicki