Analiza matematyczna 1

lista zadań nr 6

szeregi liczbowe

Rozgrzewka

1. Rozstrzygnij zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{n}{n^2+1}, \qquad \sum_n \frac{1}{2^n-1}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}.$$

2. Rozstrzygnij zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_n \frac{2^n}{n!}.$$

3. Udowodnij, że jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n \frac{a_n}{2^n}$ też jest zbieżny.

Ćwiczenia

1. Rozstrzygnij zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{n^2}{n^4+1}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1+(-1)^n}, \qquad \sum_n \frac{3^n+2^n}{n\,3^n+1}, \qquad \sum_n \frac{(-3)^n+2^n}{n\,3^n+1}.$$

Uwaga: ostatni przykład jest trudny!

2. Rozstrzygnij zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{n^K}{L^n}, \qquad \sum_n \frac{L^n}{n!}, \qquad \sum_n \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \qquad \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_n \frac{n^n}{(2n)!}.$$

3. (a) Udowodnij, że jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to zbieżne są szeregi $\sum_n a_n^2$ oraz $\sum_n \frac{a_n}{n}$.
   (b) Podaj przykład szeregu zbieżnego $\sum_n a_n$, dla którego szeregi $\sum_n a_n^2$ oraz $\sum_n \frac{|a_n|}{n}$ są rozbieżne.
   (c) Korzystając z twierdzenia Abela, udowodnij, że jeśli szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_n \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny.

4. *Przestawianie wyrazów*
   (a) Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{2^k}$ gdy $2^k \leq n < 2^{k+1}$ $(k \geq 1)$. Udowodnij, że $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 0$.
   (b) Niech $b_n = \frac{1}{2^k}$ gdy $2^k \leq n < 2^k + 2^{k-1}$ oraz $b_n = \frac{-1}{2^k}$ gdy $2^k + 2^{k-1} \leq n < 2^{k+1}$ $(k \geq 1)$. Udowodnij, że $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Odpoczynek

3. (a) Udowodnij, że jeśli $\sum_n a_n^2$ i $\sum_n b_n^2$ są zbieżne, to zbieżny jest szereg $\sum_n a_n b_n$.
   (b) Wywnioskuj, że jeśli $\sum_n a_n^2$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_n \frac{a_n}{n}$.
   (c) Udowodnij, że jeśli dla każdego ciągu (b_n) takiego, że $\sum_n b_n^2$ jest zbieżny, szereg $\sum_n a_n b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n a_n^2$ jest zbieżny.

4. *Przestawianie wyrazów* Załóżmy, że szereg $\sum_n a_n$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej g można tak poprzestawiać wyrazy tego szeregu, by otrzymać sumę g.

5. Załóżmy, że ciąg (a_n) liczb dodatnich jest zbieżny do zera. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Udowodnij, że dla każdej liczby $g \in \mathbf{R}$ istnieje ciąg (ε_n) taki, że $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = g$.

6. *Sumowanie w sensie Abela*

   (a) Szereg $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ jest rozbieżny, ale jest sumowalny w sensie Abela. Wyznacz wartość tej sumy.

   (b) Podobnie wyznacz sumę $\sum_{n\geq 0}(-1)^n n$.

   (c) Udowodnij, że jeśli ciąg sum częściowych (A_n) szeregu $\sum_{n\geq 0} a_n$ jest *zbieżny w sensie Cesàro*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n}{n+1} = g$$

   dla pewnego g, to szereg $\sum_{n\geq 0} a_n$ jest sumowalny w sensie Abela i sumą jest g.

Mateusz Kwaśnicki