

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

LISTA ZADAŃ NR 7

LICZBA e

Rozgrzewka

1. Wyznacz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^{n^2}.$$

2. Rozstrzygnij zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_n \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Ćwiczenia

1. Wyznacz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right)^{2n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n + 2^n}{4^n - 2^n}\right)^{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

2. Podaj promień zbieżności szeregu $\sum_n \frac{n!}{n^n} x^n$.

Odpoczynek

1. Udowodnij, że ciąg o wyrazach $(1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący, a ciąg o wyrazach $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący.

2. Czy ciąg $(1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ jest rosnący lub malejący?

3. Czy szereg $\sum_n \frac{e^n n!}{n^n}$ jest zbieżny?

4. Czy szereg $\sum_n \frac{n^n}{e^n n!}$ jest zbieżny?

5. Udowodnij, że jeśli ciąg (ε_n) jest zbieżny do zera, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + \varepsilon_n}{n}\right)^n = \exp(x).$$

6. Udowodnij, że dla dowolnego ciągu (ε_n) takiego, że $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, liczba $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$ jest niewymierna.

Mateusz Kwaśnicki