Analiza matematyczna 1

lista zadań nr 8

ciągłość

Rozgrzewka

1. Zbadaj (z definicji) ciągłość funkcji $f(x) = |x|$.
2. Turysta wyruszył w góry z przystanku PKS w sobotę o godzinie 10:00 i dotarł do schroniska o 16:00. Następnego dnia wyruszył ponownie o 10:00, zszedł niespieszno tym samym szlakiem w dół i na przystanku był o 16:00. Udowodnij, że w pewnym miejscu trasy był o tej samej godzinie w sobotę i w niedzielę.
3. Udowodnij, że wielomian $x^7 + x^2 - 2$ ma pierwiastek.

Ćwiczenia

1. (a) Udowodnij, że funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ dla $x \neq 2$ oraz $f(2) = 3$ jest nieciągła. Co trzeba zmienić, by f była ciągła?

   (b) Udowodnij, że funkcja f dana wzorem $f(x) = 1$ dla x wymiernych, $f(x) = 0$ dla x niewymiernych nie jest ciągła w żadnym punkcie.

   (c) Podaj przykład funkcji nieciągłej w żadnym punkcie, której kwadrat jest funkcją ciągłą.
2. Niech F będzie figurą na płaszczyźnie. Udowodnij, że istnieje prosta dzieląca figurę F na dwie figury o jednaowym polu.
3. Niech $f : [a, b] \to [a, b]$. Udowodnij, że f ma punkt stały, tj. $f(x) = x$ dla pewnego $x \in [a, b]$.
4. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^2 - 1$ ma co najmniej dwa pierwiastki.
5. Czy złożenie funkcji nieciągłych może być funkcją ciągłą? Czy złożenie funkcji ciągłej i funkcji nieciągłej może być funkcją ciągłą?
6. Zbadaj zbieżność punktową i zbieżność jednostajną ciągów funkcji na podanych zbiorach:

$$\begin{array}{llll} f_n(x) = x^n, & x \in [0,1]; & F_n(x) = x^n, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g_n(x) = \dfrac{1}{nx}, & x \in (0,\infty); & G_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, & x \in (0,\infty); \\ h_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, & x \in \mathbf{R}; & H_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, & x \in \mathbf{R}. \end{array}$$

   Czy funkcje graniczne są ciągłe?

Odpoczynek

1. Podaj ścisły dowód tego, że funkcja f określona wzorem $f(x) = 0$ dla x niewymiernych i $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ gdy $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$, jest ciągła w x wtedy i tylko wtedy, gdy x jest niewymierne.
2. (a) Niech F_1, F_2 będą figurami płaskimi. Udowodnij, że istnieje prosta dzieląca obie figury F_1 i F_2 na pół.

   (b) Niech F_1, F_2, F_3 będą figurami przestrzennymi. Udowodnij. że istnieje płaszczyzna dzieląca wszystkie trzy figury F_1, F_2 i F_3 na pół (*twierdzenie o istnieniu sprawiedliwego podziału kanapki z szynką i serem*).
3. Udowodnij, że dla każdej funkcji f określonej na okręgu o i o wartościach rzeczywistych istnieją dwa przeciwległe punkty $A, B \in o$ takie, że $f(A) = f(B)$.
4. *Twierdzenie Diniego.* Udowodnij, że jeśli ciąg (f_n) rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$ jest niemalejący i dąży do funkcji ciągłej g, to (f_n) dąży do g jednostajnie.

5. *Twierdzenie Weierstrassa.*

(a) Udowodnij, że dla $x \in [0, 1]$ ciąg wielomianów $P_1(x) = 0$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$ jest niemalejący i ograniczony z góry przez $\sqrt{x}$, i wobec tego dąży do $\sqrt{x}$. Skorzystaj z tw. Diniego by stwierdzić, że zbieżność jest jednostajna.

(b) Niech $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbf{R}$. Skonstruuj wielomian $Q(x)$ taki, że $|Q(x) - |x|| < \varepsilon$ dla $x \in [a, b]$.

(c) Dla dowolnej funkcji $g = Ax + \sum_{j=1}^{k} B_j |x - C_j|$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ skonstruuj wielomian $R(x)$ taki, że $|R(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla $x \in [a, b]$.

(d) Udowodnij, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g jak wyżej taka, że $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ dla $x \in [a, b]$.

(e) Udowodnij twierdzenie Weierstrassa.

Mateusz Kwaśnicki