Analiza matematyczna 1

lista zadań nr 9

pochodne funkcji

Rozgrzewka

1. Oblicz z definicji pochodne funkcji:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \qquad h(x) = \sin x.$$

2. Oblicz (raczej nie z definicji) pochodne funkcji:

$$f(x) = e^x \operatorname{arctg} x, \qquad g(x) = e^{e^x}, \qquad h(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$

3. Sprawdź, czy poniższe funkcje są różniczkowalne:

$$f(x) = |x|^3, \qquad g(x) = |x^2 - 1|, \qquad h(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leq 0, \\ \sin x + \cos x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

4. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, oblicz pochodną funkcji f^{-1} w punkcie y_0, jeśli

   (a) $f(x) = x^2$, $y_0 = 2$;

   (b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $y_0 = 0$.

   Następnie znajdź jawny wzór na f^{-1}, oblicz pochodną uzyskanej funkcji i porównaj z otrzymanym wcześniej wynikiem.

5. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji $f(x)$ wokół punktu x_0 z n-tą resztą, oblicz przybliżoną wartość $f(x)$, jeśli

   (a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2$;

   (b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2$.

   Oszacuj błąd przybliżenia, wyrażając resztę w postaci Lagrange'a i w postaci Cauchy'ego.

Ćwiczenia

1. Oblicz z definicji pochodne funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad h(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

2. Oblicz pochodne funkcji:

$$f(x) = e^{x \operatorname{arctg} x}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{\ln(1 + x^2)}, \qquad h(x) = \sqrt[x]{x}$$

$$i(x) = \frac{2^{\sin x}}{3^{\cos x}} \qquad j(x) = \arccos(\sin x), \qquad k(x) = x^{\operatorname{tg} x}.$$

3. Sprawdź, czy poniższe funkcje są różniczkowalne:

$$f(x) = |x^2 - 1|^3, \qquad g(x) = |x^2 - x|, \qquad h(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ (x+1)^2 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

4. Oblicz pochodną funkcji f^{-1} w punkcie y_0, jeśli

(a) $f(x) = x\,e^x$, $y_0 = e$ (f^{-1} to tzw. funkcja W Lamberta);
(b) $f(x) = x^x$, $y_0 = 4$.

5. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji $f(x)$ wokół punktu x_0 z n-tą resztą, oblicz przybliżoną wartość $f(x)$, jeśli

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x = \frac{99}{100}$, $n = 1, 2$;
   (b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, 3$.

6. (a) Udowodnij, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x \le 0, \end{cases}$$
jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

   (b) Udowodnij, że funkcja
$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$
jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i spełnia $g(x) = 0$ dla $x \le 0$, $g(x) = 1$ dla $x \ge 1$. Naszkicuj wykres g.

   (c) Udowodnij, że funkcja $h(x) = g(2 - |x|)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i spełnia $h(x) = 0$ gdy $|x| \ge 2$, $h(x) = 1$ gdy $|x| \le 1$. Naszkicuj wykres h.

Odpoczynek

6. Przez h oznaczamy funkcję z ćwiczenia 6. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

   (a) Niech $M_n = \sup \left\{ h^{(k)}(x) \ : \ k < n,\, x \in \mathbf{R} \right\}$. Określmy
$$\lambda_n = 8^n n! M_n \max(1, |a_n|), \qquad\qquad p_n(x) = a_n \frac{x^n}{n!} h(\lambda_n x)\,.$$
Udowodnij, że $p_n^{(k)}(0) = 0$ dla wszystkich $k \ne n$, $p_n^{(n)}(0) = a_n$ i ponadto:
$$|p_n^{(k)}(x)| \le 2^{-n}, \qquad\qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$
Wskazówka: udowodnij, że jeśli $|x| < 2\lambda_n^{-1}$, $k < 1$, to
$$\begin{aligned} |p_n^{(k)}(x)| &\le \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(\frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} \right) \cdot \left(\lambda_n^{k-j} M_n \right) \\ &\le \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(n! 2^n \lambda_n^{j-n} \right) \cdot \left(\lambda_n^{n-1-j} M_n \right) \\ &= a_n \cdot 2^k \cdot 2^n M_n \lambda_n^{-1}. \end{aligned}$$

   (b) Niech
$$q_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(k)}(x).$$
Udowodnij, że powyższe szeregi są zbieżne jednostajnie do q_k i wobec tego jeśli $q(x) = q_0(x)$, to $q_k(x) = q^{(k)}(x)$. W szczególności $q^{(k)}(0) = a_k$.

   (c) Wskaż nieskończenie wiele razy różniczkowalną funkcję q, której szereg Maclaurina jest rozbieżny dla każdego $x \ne 0$.

Mateusz Kwaśnicki