

ANALIZA MATEMATYCZNA 2
LISTA ZADAŃ NR 1
CAŁKA RIEMANNA, CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

Rozgrzewka

1. Stosując definicję całki Riemanna i obliczając całkę oznaczoną $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, wyznacz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right).$$

Zadanie dodatkowe: analogicznie wyznaczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2}} \right)$.

2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie, oblicz całkę $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + (\sin x)^3} dx$.
3. Przypomnij sobie regułę de l'Hospitala i oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) \ln x$.
4. Wyznacz całki niewłaściwe:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{tg}(e^{-x}) e^{-x} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx.$$

Ćwiczenia

1. Wyznacz całkę $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Wykorzystaj wynik do wyznaczenia granic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right),$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{n+1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{n+2} + \dots + \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n+n} \right).$$

2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych, oblicz wartość

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + (\operatorname{tg} x)^2}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$$

3. Niech $f(x) = -x \ln x$ dla $x > 0$, $f(0) = 0$. Udowodnij, że f jest ciągła. Wyznacz całkę $\int_0^1 f(x) dx$.

4. Wyznacz całki niewłaściwe

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx, \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$