Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 10 — krzywe

Rozgrzewka

1. *Cykloida.* Znajdź równanie krzywej $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ zakreślonej przez pyłek, który przyczepił się do toczącego się koła o promieniu r. Przyjmijmy, że koło toczy się z prędkością 1 w prawo po osi poziomej, w chwili początkowej środek koła jest w punkcie $(0, r)$, a pyłek znajduje się na dole koła.

2. *Epicykloida.* Jak wyżej, ale koło toczy się po innym kole o promieniu ϱ. Zauważ, że gdy $\varrho = r$, to otrzymujemy *kardioidę*.

3. *Hipocykloida.* Jak wyżej, ale koło toczy się wewnątrz innego koła o promieniu $\varrho > r$.

4. *Brachistochrona* — linia najszybszego spadku. Jaką krzywą połączyć punkty $(0, 0)$ oraz $(x, -h)$ tak, aby czas toczenia się małej kulki z $(0, 0)$ do $(x, -h)$ był możliwie najkrótszy? (Odpowiedź: odwrócona cykloida z wierzchołkiem w $(0, 0)$.)

5. *Traktrysa.* Znajdź tor $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ruchu pajączka ciągniętego przez jadący przez łąkę rower. W chwili początkowej rower znajduje się w punkcie $(0, 0)$, a pajączek w punkcie $(0, 1)$. Rower porusza się z prędkością 1 w prawo, a nić pajęcza jest nierozciągliwa. Wskazówka: $\gamma(t) = (t - \sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t))$, a wektory $\gamma'(t)$ oraz $(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t))$ są współliniowe.

6. *Psia krzywa.* Pies znajduje się w punkcie $(0, 1)$ i dostrzega zająca w punkcie $(0, 0)$. Postanawia go gonić, kierując się cały czas w stronę zająca; ten jednak ucieka ze stałą szybkością wzdłuż osi poziomej. Znajdź tor ruchu $y(x)$ psa, jeśli prędkość pościgowa psa wynosi 1, a prędkość ucieczki zająca $v > 0$. Wskazówka: jeśli parametrem jest czas t, to $\gamma'(t)$ oraz $(vt, 0) - \gamma(t)$ są współliniowe.

7. *Spirala Cornu.* Znajdź krzywą $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ z naturalnym parametrem długości, której krzywizna wynosi $\kappa(s) = as$ $(a > 0)$. Przyjmij, że $\gamma(0) = (0, 0)$ oraz $\gamma'(0, 0) = (1, 0)$. Wskazówka: $\gamma'(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ dla pewnej funkcji φ.

Ćwiczenia

1. Znajdź długość następujących krzywych:

   (a) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (b) $x(t) = t + \cos(2 \operatorname{arctg} e^t)$, $y(t) = \sin(2 \operatorname{arctg} e^t)$, $t \in [0, T]$.

2. Niech γ będzie krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych funkcjami $r(t)$ i $\vartheta(t)$, tj. niech $\gamma(t) = (r(t) \cos\vartheta(t), r(t) \sin\vartheta(t))$, gdzie $r(t)$, $\vartheta(t)$, $t \in [a, b]$, są gładkimi funkcjami t. Wyznacz wektor styczny do γ, wzór na długość γ oraz krzywiznę γ.

3. Zapisz wyznaczone wzory dla krzywej danej we współrzędnych biegunowych, sparametryzowanej kątem ϑ, tj. gdy $\gamma(\vartheta) = (r(\vartheta) \cos\vartheta, r(\vartheta) \sin\vartheta)$.

4. Wykorzystaj wyznaczone wzory do obliczenia długości (oprócz (d)) i krzywizny:

   (a) kardioidy: $r = 1 - \cos\vartheta$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$;
   (b) spirali archimedesa: $r = c\vartheta$, $0 \le \vartheta \le T$;
   (c) spirali logarytmicznej: $r = a^\vartheta$, $0 \le \vartheta \le T$;
   (d) spirali Fermata: $r^2 = \vartheta$, $0 \le \vartheta \le T$.

5. Uzasadnij, że dla dowolnej ciągłej funkcji $\kappa : [a, b] \to \mathbf{R}$ istnieje dokładnie jedna krzywa $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}$ z naturalnym parametrem długości, dla której $\gamma(a) = (0, 0)$, $\gamma'(a) = (1, 0)$ i której krzywizna dana jest przez funkcję κ.

6. Załóżmy, że $\vec{r}(t) = \gamma(t)$ opisuje ruch cząstki na płaszczyźnie w czasie. Wówczas $\vec{v}(t) = \gamma'(t)$ jest prędkością cząstki, a $\vec{a}(t) = \gamma''(t)$ jej przyspieszeniem. Załóżmy, że prędkość w każdej chwili ma dodatnią długość $v(t)$. Niech $\vec{e}_1(t)$ i $\vec{e}_2(t)$ będą takimi wektorami jednostkowymi, że $\vec{e}_1(t)$ i $\vec{v}(t)$ są współliniowe i mają ten sam zwrot, zaś $\vec{e}_2(t)$ jest obrazem $\vec{e_1}(t)$ przez obrót o $\frac{\pi}{2}$ w lewo ($\vec{e}_1(t)$ to wektor styczny do krzywej, $\vec{e}_2(t)$ to wektor normalny). Wówczas $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_1(t)$.

   Możemy rozłożyć $\vec{a}(t)$ na sumę $a_s(t)\vec{e}_1(t) + a_n(t)\vec{e}_2(t)$; $a_s(t)$ i $a_n(t)$ to tzw. przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne. Uzasadnij, że

   $$a_s(t) = v'(t), \qquad a_n(t) = \kappa(t)(v(t))^2,$$

   gdzie κ jest krzywizną γ. Jaki wzór znany z fizyki odpowiada drugiej równości? Uzasadnij, że funkcje a_s i a_n wyznaczają krzywą γ jednoznacznie, jeśli dane jest położenie początkowe $\vec{r}(0)$ i prędkość początkowa $\vec{v}(0)$.

Mateusz Kwaśnicki

Krzywe w $\mathbf{R}^3$. Załóżmy, że ruch cząstki w przestrzeni opisany jest przez krzywą $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$, trzykrotnie różniczkowalną i taką, że $\gamma'(t)$ jest niezerowe. Jak w poprzednim zadaniu określamy $\vec{r}(t) = \gamma(t)$, $\vec{v}(t) = \gamma'(t)$, $\vec{a}(t) = \gamma''(t)$, $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ oraz wektor styczny $\vec{e}_1(t)$ taki, że $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_1(t)$. Uzasadnij, że istnieje wektor normalny $e_2(t)$ zależący od czasu w sposób różniczkowalny i taki, że $\vec{a}(t) = a_s(t)\vec{e}_1(t) + a_n(t)\vec{e}_2(t)$. Niech $\vec{e}_3(t) = \vec{e}_1(t) \times \vec{e}_2(t)$ („$\times$" oznacza iloczyn wektorowy; $\vec{e}_3(t)$ to tzw. *wektor binormalny*). Krzywiznę γ definiuje się jako $\kappa(t) = |a_n(t)|/(v(t))^2$. Wykaż, że $\vec{e}_3'(t) = -\tau(t)\vec{e}_2(t)$ dla pewnej funkcji τ (tzw. *torsji* krzywej γ; jest to jeden ze wzorów Freneta). Udowodnij, że ruch cząstki jest opisany jednoznacznie przez położenie początkowe $\vec{r}(0)$, prędkość początkową $\vec{v}(0)$, początkową wartość $\vec{e}_2(t)$ (lub $\vec{e}_3(t)$) oraz funkcje przyspieszenia stycznego a_s, przyspieszenia normalnego a_n i torsję τ. Czy a_n i τ są wyznaczone jednoznacznie przez krzywą γ? Wskazówka do interpretacji: wygodnie myśleć, że γ opisuje ruch samolotu, który może tylko przyspieszać lub zwalniać (przyspieszenie styczne), unosić lub opuszczać dziób (krzywizna lub przyspieszenie normalne) i obracać się wokół swojej osi (torsja).