Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 10 — całki krzywoliniowe

Przypomnienie

- Jeśli F i G są funkcjami dwóch zmiennych, to $\vec{A} = (F, G)$ (ściślej: $\vec{A}(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$) nazywamy *polem wektorowym.*
- Jeśli Γ jest krzywą kawałkami gładką, a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ jej parametryzacją, $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, to mamy trzy rodzaje całek krzywoliniowych (po lewej stronie symbolu $\stackrel{def}{=}$ są oznaczenia, po prawej — definicje):

$$\int_\Gamma f\,ds \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt,$$

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (F\,dx + G\,dy) \stackrel{def}{=} \int_a^b \vec{A}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_a^b (F(x(t),y(t))x'(t) + G(x(t),y(t))y'(t))dt,$$

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{n} = \int_\Gamma (F\,dy - G\,dx) \stackrel{def}{=} \int_a^b \vec{A}(\gamma(t))\cdot\vec{n}(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b (F(x(t),y(t))y'(t) - G(x(t),y(t))x'(t))dt.$$

- Jeśli Γ jest krzywą zamkniętą, to piszemy $\oint_\Gamma$ zamiast $\int_\Gamma$ i zwykle zakładamy, Γ jest zorientowana dodatnio.
- *Twierdzenie Greena*: jeśli D jest obszarem, którego brzeg jest zorientowaną dodatnio krzywą Γ kawałkami gładką, to dla dowolnych funkcji F, G o ciągłych pochodnych cząstkowych na $D \cup \Gamma$ zachodzi

$$\oint_\Gamma (F\,dx + G\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

- Gradient: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
  Laplasjan: $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
  Dywergencja: $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$; tutaj $\vec{A} = (A_x, A_y)$.

Rozgrzewka

1. Oblicz całki krzywoliniowe (przyjmij orientację „w prawo”):

$$\int_\Gamma (x^2y dx + xy^2 dy), \qquad \Gamma = \left\{(x,y)\ :\ y = 1-x^2,\ -1 \le x \le 1\right\},$$

$$\int_\Gamma \sqrt{x}\,ds, \qquad \Gamma = \left\{(x,y)\ :\ y = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1},\ 1 \le x \le 2\right\}.$$

2. Przećwicz oznaczenia:
   - jeśli f jest funkcją dwóch zmiennych, to ∇f jest polem wektorowym;
   - jeśli f oraz g są funkcjami dwóch zmiennych, to $\nabla f \cdot \nabla g$ jest funkcją skalarną;
   - zachodzi wzór $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;
   - zachodzi wzór $\Delta f = \operatorname{div}\nabla g$.

Ćwiczenia rachunkowe

1. Niech Γ będzie półokręgiem $\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 = 4,\ y \ge 0\right\}$ o początku w punkcie $(2,0)$ i końcu $(-2,0)$ (w ten sposób ustalamy orientację Γ). Oblicz całki krzywoliniowe:

$$\int_\Gamma y ds, \qquad \int_\Gamma (ydx + 0dy), \qquad \int_\Gamma (0dx + ydy).$$

2. Oblicz pracę siły sprężystości $\vec{F}(x,y) = (-x,-y)$ wzdłuż krzywej o parametryzacji $\gamma(t) = (t, t^2 - 1)$, $t \in (0,1)$.

3. Ruch powietrza opisany jest przez pole wektorowe $\vec{V}(x,y) = (2y, y-x)$. Oblicz ilość powietrza przepływającego przez: (a) odcinek łączący punkty $(0,0)$ i $(1,1)$; (b) wycinek paraboli $y = x^2$ łączący te same punkty.

4. Skomentuj wynik poprzedniego zadania w świetle twierdzenia Greena: rozważ obszar zawarty pomiędzy dwiema krzywymi z poprzedniego zadania oblicz odpowiednią całkę podwójną.

Ćwiczenia teoretyczne

W poniższych zadaniach zakładamy, że D i Γ spełniają założenia tw. Greena.

1. Udowodnij, że całka krzywoliniowa z pola wektorowego nie zależy od parametryzacji, tj. jeśli $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h(t))$ są równoważnymi parametryzacjami krzywej gładkiej Γ (tzn. $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbf{R}^2$ są gładkie, $h : [c,d] \to [a,b]$ jest różniczkowalna i rosnąca), to

$$\int_a^b \vec{A}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_c^d \vec{A}(\tilde{\gamma}(r)) \cdot \tilde{\gamma}'(r) dr.$$

2. Stosując wzór Greena dla odpowiednich funkcji F i G udowodnij *twierdzenie o dywergencji*:

$$\oint_\Gamma (f dy - g dx) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

   Innymi słowy, jeśli $\vec{a}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$, to

$$\oint_\Gamma \vec{a}(x,y) \cdot d\vec{n} = \iint_D \operatorname{div} \vec{a}(x,y) dx\, dy.$$

3. Udowodnij, że $\operatorname{div}(u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$.

4. Udowodnij *pierwszy wzór Greena*:

$$\oint_\Gamma u \nabla v \cdot d\vec{n} = \iint_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx\, dy.$$

   (wstaw do twierdzenia o dywergencji $\vec{a}(x,y) = u(x,y) \nabla v(x,y)$).

5. Udowodnij *drugi wzór Greena*:

$$\oint_\Gamma (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\vec{n} = \iint_D (u \Delta v(x,y) - v \Delta u)\, dx\, dy.$$

   (wstaw do twierdzenia o dywergencji $\vec{a}(x,y) = u(x,y) \nabla v(x,y)$).

6. Korzystając z twierdzenia Greena udowodnij, że pole obszaru D wyraża się wzorem $\oint_\Gamma (0dx + x dy)$.

Mateusz Kwaśnicki