Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 12 — wzór Greena

Rozgrzewka

1. Niech $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 6)$. Oblicz iloczyn wektorowy $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Ile wynosi $\vec{u} \cdot \vec{w}$ oraz $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Niech $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ oraz $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Jaki sens można nadać napisom: $\nabla \cdot \vec{F}$, $\nabla \times \vec{F}$ oraz $\nabla \cdot \nabla$?

   Powinno zachodzić $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (porównaj z poprzednim zadaniem). Czy tak jest faktycznie? Jak napisać tę równość formalnie, korzystając z symboli rot i div?

Ćwiczenia

1. Korzystając ze wzoru Greena, oblicz całkę krzywoliniową
$$\oint_\Gamma \left(\sqrt{x^2+y^2}dx + \left(xy + y\ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right) dy\right),$$
gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 1 < x < e, \, 0 < y < \ln x\right\}.$$
2. Sprawdź, że następujące pola są potencjalne:
$$\vec{F}(x, y) = \left(3x^2y^4 - 6xy - 4, 4x^3y^3 - 3x^2 + 5\right), \qquad \vec{G}(x, y) = \left(\ln|xy|, \tfrac{|x|}{|y|}\right).$$
3. Oblicz potencjały pól z poprzedniego zadania. (Co można powiedzieć o dziedzinie pola i potencjału w punkcie (b)?)
4. Niech
$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Czy pole $\vec{F}$ jest potencjalne? Czy można wyznaczyć potencjał pola $\vec{F}$? Co można powiedzieć o dziedzinie pola i potencjału? Oblicz wprost (tzn. parametryzując krzywą) całkę
$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$
gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem jednostkowym. Dlaczego wynik jest niezerowy?
5. Sprawdź, że pole $\vec{F}(x, y) = (p(x), q(y))$ (tutaj p i q są pewnymi funkcjami ciągłymi) jest potencjalne i oblicz jego potencjał.
6. Oblicz całkę
$$\int_\Gamma \left(\left(\frac{x}{x+y} + \log(x+y)\right) dx + \frac{x}{x+y}\, dy\right),$$
jeśli Γ jest krzywą daną w sposób uwikłany równaniem $x^y + y^x = 3$ o początku w punkcie $(1, 2)$ i końcu w punkcie $(2, 1)$. Wskazówka: nie trzeba parametryzować Γ!
7. Korzystając ze wzoru na pole powierzchni S sparamteryzowanej funkcjami $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, gdzie $(s, t) \in D$, tzn. ze wzoru:
$$|S| = \iint_S 1 dS = \iint_D \|\vec{n}(s,t)\| \, ds dt, \quad \text{gdzie} \quad \vec{n}(s,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right),$$
udowodnij wzór na pole powierzchni otrzymanej przez obrót wykresu $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ wokół osi x. Zastosuj parametryzację:
$$x(s,t) = s, \qquad y(s,t) = f(s)\cos t, \qquad z(s,t) = f(s)\sin t,$$
gdzie $a \le s \le b$, $0 \le t \le 2\pi$.

Mateusz Kwaśnicki