Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 13 — całki powierzchniowe

Ćwiczenia

1. Korzystając ze wzoru z ostatniego zadania z poprzedniej listy, oblicz pole:

   (a) powierzchni bocznej walca $y^2 + z^2 = r^2$, $a \le x \le b$;

   (b) powierzchni bocznej stożka $y^2 + z^2 = c^2 x^2$, $0 \le x \le a$;

   (c) wycinka sfery $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$, $a \le x \le b$, gdzie $a, b \in [-r, r]$;

   (d) powierzchni $y^2 + z^2 = (\cosh x)^2$, $-a \le x \le a$.

2. Oblicz całki powierzchniowe:

   $$(a) \quad \iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dS, \qquad \text{gdzie } S = \bigl\{(x, y, x^2 - y^2) \;:\; x^2 + y^2 \le 1\bigr\};$$

   $$(b) \quad \iint\limits_S 1 dS, \qquad \text{gdzie } S = \bigl\{(x, y, x^4 + y^4) \;:\; x^2 + y^2 \le \tfrac{3}{4}\bigr\};$$

   $$(c) \quad \oiint\limits_S 1 dS, \qquad \text{gdzie } S = \Bigl\{(x, y, z) \;:\; (\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2 + z^2 = 1\Bigr\}.$$

   W punkcie (c) przyjmj parametryzację $\vec{g}(\varphi, \vartheta) = ((r + \cos\vartheta)\cos\varphi, (r + \cos\vartheta)\sin\varphi, \sin\vartheta)$. Powierzchnia S to tzw. torus.

3. Oblicz na dwa sposoby całki powierzchniowe:

   $$(a) \quad \iint\limits_S (xz, yz, -z^2) \cdot d\vec{n}, \qquad \text{gdzie } S = \bigl\{(x, y, x^2 - y^2) \;:\; x^2 + y^2 \le 1\bigr\};$$

   $$(b) \quad \oiint\limits_S (x, y, z + 1) \cdot d\vec{n}, \qquad \text{gdzie } S = \Bigl\{(x, y, z) \;:\; (\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2 + z^2 = 1\Bigr\}.$$

   (Pierwszy sposób to skorzystanie z definicji; drugi — ze wzoru Stokesa lub tw. o dywergencji.)
   Wskazówka: $\operatorname{rot} \vec{F} = (xz, yz, -z^2)$ np. gdy $\vec{F} = (yz^2, -xz^2, 0)$.

Mateusz Kwaśnicki