Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 14 — równania różniczkowe

Rozgrzewka

1. Rozwiąż poniższe zagadnienie początkowe. W jakim przedziale jest określone rozwiązanie?
$$f(t)f'(t) = k, \qquad f(0) = 1 \qquad (k \in \mathbf{R} \text{ — parametr}).$$

2. Dla danej funkcji różniczkowalnej $p(t)$, rozwiąż równanie różniczkowe:
$$f'(t) + p'(t)f(t) = p'(t).$$

3. Uzasadnij, że jeśli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są rozwiązaniami jednorodnego równania liniowego
$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = 0,$$
to funkcja $c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$ również jest jego rozwiązaniem.

Ćwiczenia

1. Rozwiąż poniższe równania różniczkowe. W jakich przedziałach określone są rozwiązania?
$$(a)\ f'(t) = t\left(1 + (f(t))^2\right), \qquad (c)\ (f'(t))^2 = 1 - (f(t))^2,$$
$$(b)\ 2f(t)f'(t) = t\left(1 + (f(t))^2\right), \qquad (d)\ f'(t) + (f(t))^2 = 3t^2(f'(t))^2.$$

2. Rozwiąż poniższe zagadnienia początkowe. W jakich przedziałach określone są rozwiązania?
$$(a)\ f'(t) = -e^{f(t)+t+1}, \qquad f(0) = -1,$$
$$(b)\ (1+t^2)^2 f'(t) = (1-t^2)(1+(f(t))^2) \qquad f(0) = \sqrt{3},$$
$$(c)\ (1+t^2)^2 f'(t) = (1-t^2)(1+(f(t))^2) \qquad f(1) = -1.$$

3. Rozwiąż zagadnienie początkowe:
$$(a)\ \frac{f''(t) + 2(f'(t))^2 \operatorname{tg} f(t)}{(\cos f(t))^2} = -\cos t, \qquad (b)\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$$
Wskazówka: przed przystąpieniem do rozwiązania wyznacz drugą pochodną funkcji $\operatorname{tg} f(t)$.

4. Rozwiąż równania liniowe pierwszego stopnia:
$$(a)\ f'(t) - 2tf(t) = t, \qquad (b)\ f'(t) - f(t)\sin t = \sin(2t), \qquad (c)\ e^{-t}f'(t) + f(t) = 1.$$

5. Rozwiąż zagadnienia początkowe
$$(a)\ f'(t) + 2tf(t) = t, \qquad f(0) = 1,$$
$$(b)\ f'(t) - f(t)\ln t = t^t, \qquad f(1) = 0,$$
$$(c)\ f'(t) - f(t)\ln|t| = |t|^t, \qquad f(0) = 0.$$
Uwaga do ostatniego równania: rozważ wpierw $t > 0$, a później $t < 0$; czy otrzymana funkcja jest różniczkowalna w 0?

6. Znajdź wszystkie rozwiązania równań różniczkowych
$$(a)\ f''(t) + f'(t) - 12f(t) = 0, \qquad (b)\ f''(t) - 2f'(t) + 10f(t) = 0$$

7. Rozwiąż zagadnienie początkowe:
$$f^{(4)}(t) - 4f^{(3)}(t) + 5f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = 0,$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -3.$$

8. Znajdź układ fundamentalny rozwiązań równania różniczkowego
$$f^{(4)}(t) + 2f''(t) + f(t) = 0.$$

Mateusz Kwaśnicki