Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 15 — przykładowe zadania egzaminacyjne

Poniższe zadania są przykładami, nie wyczerpują wszystkich zagadnień.

Większość poziomem odpowiada trudniejszym zadaniom z egzaminu.

1. Rozwiąż zagadnienia początkowe
$$(1+t^2)f'(t)+tf(t)=\sqrt{1-t^4}, \qquad f(0)=1.$$
Wyznacz maksymalny przedział, na którym określone jest rozwiązanie. Czy rozwiązanie $f(t)$ oraz jego pochodna $f'(t)$ mają granice na krańcach tego przedziału?

2. Oblicz całkę powierzchniową
$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{n}, \qquad \text{gdzie} \qquad \vec{F}(x,y,z)=(x,y,z^3), \qquad S=\left\{(x,y,z)\ :\ |z|=1-x^2-y^2\right\},$$
zaś $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do S skierowanym zewnętrznie.
Wskazówka: Możesz skorzystać z twierdzenia o dywergencji bądź policzyć całkę przez sparametryzowanie powierzchni S. W drugim przypadku wygodnie będzie podzielić S na dwie części, będące wykresami odpowiednich funkcji.

3. Oblicz całkę krzywoliniową
$$\oint_\Gamma \Big((2x+1)dx+(x-y)dy\Big), \qquad \text{gdzie} \qquad \Gamma=\left\{(x,y)\ :\ x^2+2y^2=1\right\}.$$
Przyjmij, że Γ jest zorientowana dodatnio.
Wskazówka: Możesz skorzystać z twierdzenia Greena bądź policzyć całkę przez sparametryzowanie krzywej Γ. W pierwszym przypadku nie korzystaj ze wzoru na pole elipsy.

4. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji
$$F(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$$
w trójkącie wyznaczonym nierównościami $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 2\pi$.

5. Stosując metodę mnożników Lagrange'a, znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji
$$F(x,y,z)=x^2-xy+xz-y^2+2x-y+z$$
na płaszczyźnie danej równaniem $x+y+z=3$.

6. Napisz wielomian występujący we wzorze Taylora z drugą resztą (a więc wielomian drugiego stopnia) dla funkcji $F(x,y)=(1+x)^{1+y}$ w otoczeniu punktu $(0,0)$. Wyznacz w ten sposób przybliżoną wartość $(1,1)^{1,1}$. Rzeczywista wartość tej liczby to ok. $1,110534241$; jaki jest zatem błąd przybliżenia?

7. Uzasadnij, że równanie $x\sin x=y\cos y$ określa w pobliżu punktu $x=y=\frac{\pi}{4}$ funkcję uwikłaną $y=f(x)$. Wyznacz $f'(\frac{\pi}{4})$ oraz $f''(\frac{\pi}{4})$. Czy $f(x)$ jest w pobliżu $x=\frac{\pi}{4}$ rosnąca, malejąca, wklęsła lub wypukła?

8. Niech $f(x,y,z)=(x+y^2+z^3)e^{-x^2-2y^2-3z^2}$.
   - Udowodnij, że jeśli $\|(x_n,y_n,z_n)\|\to\infty$, to $f(x_n,y_n,z_n)$ dąży do zera.
   - Znajdź maksima i minima lokalne funkcji f.
   - Uzasadnij, że znalezione punkty są ekstremami globalnymi.

   Wskazówka: W pierwszym punkcie uzasadnij, że dla $\vec{p}=(x,y,z)$ zachodzi $|f(\vec{p})|\leq(\|\vec{p}\|+\|\vec{p}\|^2+\|\vec{p}\|^3)e^{-\|\vec{p}\|^2}$. W drugim są dwa punkty podejrzane: $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$. W trzecim wykorzystaj dwa poprzednie.

9. Niech $f(x,y,z) = \cos(3x-y)+\cos(3y+z)+\cos(3z+x)-3\cos(x+y+z)$. Czy f ma w punkcie $(0,0,0)$ minimum lub maksimum lokalne? Jaka jest odpowiedź dla funkcji $f(x,y,z) = \cos(3x-y)+\cos(3y-z)+\cos(3z+x)-3\cos(x+y+z)$?

10. Oblicz objętość nieograniczonej bryły
$$D = \left\{(x,y,z)\ :\ z(x^2+y^2)^4 < (1-z)y^4,\ z>0.\right\}$$
stosując współrzędne walcowe. (Uwaga na trudniejsze całki!)

11. Oblicz pole powierzchni (nieograniczonego) obszaru pomiędzy *cisoidą Dioklesa* i prostą $x=1$, tzn.:
$$D = \left\{(x,y)\ :\ y^2(1-x) < x^3, 0<x<1\right\}.$$
Zrób to na dwa sposoby: traktując D jako obszar zawarty między dwoma wykresami funkcji (uwaga na trudniejsze całki!) oraz we współrzędnych biegunowych.

12. Niech $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^4}$. Czy f jest ciągła w $(0,0)$? Czy $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jest ciągła w $(0,0)$? Czy istnieją pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

13. Udowodnij zbieżność całek
$$\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\, dx \qquad \text{oraz} \qquad \int_2^\infty \sin(x \ln x) dx.$$

14. Dla jakich liczb rzeczywistych a zbieżna jest całka
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln x)^a}{x}\, dx?$$
Gdy jest zbieżna, jaka jest jej wartość?

15. Dla jakich liczb rzeczywistych a zbieżna jest całka
$$\int_0^\pi (\sin x)^a\, dx?$$

Mateusz Kwaśnicki