# Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 1

całki niewłaściwe

## Rozgrzewka

1. Oblicz całki niewłaściwe, jeśli są zbieżne:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log|x|\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\cosh x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}\,dx$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego, rozstrzygnij zbieżność całek:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\cosh x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$.

3. Korzystając z kryterium Dirichleta, udowodnij zbieżność całek:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(e^x)\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x\sin(x^2)}{1+\ln x}\,dx$.

Odpowiedzi:

**1.** (a) $\frac{3}{2}$, (b) niezbieżna, (c) $-2$, (d) $2$, (e) $4$;

**2.** (a) tak, (b) nie, (c) tak, (d) tak.

**3.** (a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $g(x)=\sin x$, (b) $y=\ln x$, $f(y)=\frac{1}{y}$, $g(y)=\sin y$, (c) $f(x)=\frac{1}{1+\ln x}$, $g(x)=2x\sin(x^2)$.

## Ćwiczenia

1. Oblicz całki niewłaściwe, jeśli są zbieżne:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+12x+10}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+2\cos x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\cos x\,dx$.

2. Rozstrzygnij zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+2\sin x}{\cos x+x^2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(e^x)}{1+x^2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x\ln x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$.

3. Udowodnij, że jeśli $f, g$ są ciągłymi funkcjami dodatnimi na $(a,\infty)$ i $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, to całki $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_a^\infty g(x)dx$ są albo obie zbieżne, albo obie rozbieżne.

4. Sformułuj i uzasadnij kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych postaci $\int_a^b f(x)dx$, gdzie $f$ jest ciągła na $[a,b)$ i nieograniczona w pobliżu $b$. Wykorzystaj to kryterium do uzasadnienia rozbieżności całki $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx$.

5. Udowodnij, że zbieżna jest całka $\int_0^\infty x\sin(e^x)dx$. Zauważ, że $\limsup\limits_{x\to\infty} x\sin(e^x)=\infty$.

6. Podaj przykład nieujemnej funkcji $f(x)$ takiej, że $\int_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna i $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

7. Rozstrzygnij zbieżność całek w zależności od wartości parametrów:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)^b}\,dx$ $\quad a,b\in\mathbf{R}$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx$ $\quad a\in\mathbf{R}$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a(1-x)^b}\,dx$, $\quad a,b\in\mathbf{R}$, (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$, $\quad a\in\mathbf{R}$.

Mateusz Kwaśnicki

Wskazówki:

1. 
   - zbieżna gdy $a < 1$
   - zbieżna
   - rozbieżna
   - zbieżna
   - rozbieżna
   - zbieżna

2. 
   - kryterium porównawcze
   - kryterium Abela oraz rozgrzewka 3(b)
   - kryterium Dirichleta
   - łatwo znaleźć funkcję pierwotną

3. 
   - kryterium porównawcze

4. 
   - jeśli $|f(x)| \leq g(x)$, $\int_a^b g(x)$ jest zbieżna, $F(t) = \int_a^t f(x)dx$, $G(t) = \int_a^t g(x)dx$, $t < s$, to
   $$|F(t) - F(s)| = \left|\int_t^s f(x)dx\right| \leq \int_t^s |f(x)|dx \leq \int_t^s g(x)dx = G(s) - G(t)\,;$$
   dla dowolnego ciągu $t_n \to b$ ciąg $(G(t_n))$ spełnia warunek Cauchy'ego; zatem i $(F(t_n))$ spełnia warunek Cauchy'ego; wobec tego $F$ ma granicę w $b$
   - $\ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, zatem $\frac{x}{1-x} \leq -\frac{1}{\ln x}$ dla $x \in (0,1)$

5. 
   - podstawienie $x = \ln y$, kryterium Dirichleta

6. 
   - np. funkcja, której wykres jest łamaną o (nieskończenie wielu) wierzchołkach w punktach $(n-1,0)$, $(n - \frac{1}{2^{n+1}}, 0)$, $(n - \frac{1}{2^{n+2}}, n)$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$

7. 
   - $a < 1$, $a + b > 1$
   - $a > -1$
   - $a > -1$, $b > -1$
   - $0 < a < 2$