Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 3

całki z parametrem

Rozgrzewka

1. Niech $j(x,a) = \cos(a \sin x)$, $a \geq 0$, $x \in [0,\pi]$. Określamy

$$J(a) = \int_0^\pi j(x,a)dx.$$

   (a) Udowodnij, że J jest funkcją ciągłą parametru a.

   (b) Udowodnij, że J jest różnicznowalna oraz

$$J'(a) = -\int_0^\pi \sin(a \sin x) \sin x dx.$$

Ćwiczenia

1. Niech $\gamma(x,a) = x^{a-1}e^{-x}$ dla $x > 0$, $a > 0$ i określmy:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \gamma(x,a)dx.$$

   (a) Wykorzystaj zadanie z poprzedniej listy, by stwierdzić, że całka określająca $\Gamma(a)$ jest zbieżna.

   (b) Udowodnij, że Γ jest ciągłą funkcją parametru a.

   Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

   Wskazówka do wskazówki: Jeśli $\lim a_n = a$, $a_n > 0$, $a > 0$, to $a_n \in [m, M]$ dla pewnych $m, M > 0$ i wobec tego $x^{a-1} \leq x^m + x^M$.

   (c) Udowodnij, że Γ jest różniczkowana oraz że Γ' jest ciągła.

   (d) Udowodnij, że Γ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i znajdź wzór na $\Gamma^{(n)}(a)$.

   (e) Korzystając ze wzoru na $\Gamma''(a)$ udowodnij, że Γ jest funkcją wypukłą.

   (f) Udowodnij, że $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$.

   Wskazówka: Całkowanie przez części

   (g) Udowodnij, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla wszystkich liczb naturalnych n.

2. Udowodnij, że

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x} \cos x dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

   W tym celu zróżniczkuj całkę

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \cos x dx$$

   po parametrze a. Czy umiesz uzasadnić poprawność wszystkich przejść?

Mateusz Kwaśnicki