

# ANALIZA MATEMATYCZNA 2

## LISTA ZADAŃ NR 4 CAŁKI WIELOKROTNE

### Rozgrzewka

- Narysuj w wybranym programie komputerowym wykresy funkcji z ćwiczeń 1, 2.  
Np. w Maximie. Albo — dla leniwych — tu. Albo — dla jeszcze leniwszych — tu, tu i tu.
- Oblicz (poprzez zamianę na całkę iterowaną) całkę podwójną  $\iint_D x dx dy$ , gdzie  $D$  jest trójkątem ograniczonym prostymi  $x = 0$ ,  $x = y$ ,  $y = 1$ . Sprawdź, czy wynikiem jest  $\frac{1}{3}$  niezależnie od tego, w jakiej kolejności wykonuje się całkowanie.
- Wyznacz współrzędne środka ciężkości jednorodnego trapezu ograniczonego prostymi  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 2$ .

### Ćwiczenia

- Udowodnij, że funkcja  $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dana wzorem

$$u(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{gdy } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0,$$
$$u(0, 0) = 0$$

jest ciągła wzdłuż każdej prostej na płaszczyźnie (tzn. dla wszystkich  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  ciągła jest funkcja jednej zmiennej  $t \mapsto u(at + b, ct + d)$ ), ale nie jest funkcją ciągłą.

- Sprawdź, czy podane funkcje można rozszerzyć do funkcji ciągłych na  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

- Założmy, że  $f$  jest ciągła na  $[a, b]$ . Zauważ, że całka podwójna  $\iint_{[a,b] \times [a,b]} (f(x) - f(y))^2 dx dy$  jest nieujemna. Wykorzystaj ten fakt do udowodnienia, że

$$\left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Uwaga: Inny dowód wykorzystuje nierówność Schwarz dla całek:  $\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)$ .

- Udowodnij twierdzenie o wartości średniej dla całki podwójnej: jeśli  $f(x, y)$  jest ciągła na obszarze  $D$ , to istnieje punkt  $(\xi, \eta) \in D$  taki, że

$$\iint_D f(x, y) dx dy = |D| f(\xi, \eta).$$

- Zmień kolejność całkowania w podanych całkach iterowanych:

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{|\sin \vartheta|}^{1+\cos \vartheta} f(r, \vartheta) dr \right) d\vartheta.$$

Uwaga: W drugiej całce wygodnie jest odpowiedź zapisać w postaci  $\int_0^1(\dots) + \int_1^2(\dots)$ .

- Wyznacz pole powierzchni, masę oraz współrzędne środka ciężkości trójkątnej płytki zawartej między prostymi  $x = 0$ ,  $y = 0$  oraz  $x + y = 1$ , której funkcja gęstości dana jest wzorem  $\rho(x, y) = xy$ .
- Wyznacz współrzędne środka ciężkości jednorodnej płytki o kształcie ćwierćkola, tj. zbioru  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .