

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

LISTA ZADAŃ NR 5

CAŁKI WIELOKROTNE

Ściągą: $\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$, $\int (\cos x)^3 dx = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + c$, $\int (\cos x)^4 dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

Rozgrzewka

1. Stosując współrzędne biegunowe, obliczyć pole powierzchni obszaru

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} \leq x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4\}.$$

Wskazówka: $\cos 5\varphi = (\cos \varphi)^5 - 10(\cos \varphi)^3(\sin \varphi)^2 + 5\cos \varphi(\sin \varphi)^4$.

Wynik: π .

2. Stosując współrzędne sferyczne, obliczyć objętość bryły

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \geq 2x^2\}.$$

Wynik: $\frac{4\pi}{7}$.

Ćwiczenia

1. Stosując współrzędne biegunowe, wyznacz pole powierzchni, współrzędne środka ciężkości oraz moment bezwładności (względem osi przechodzącej przez punkt $(0, 0)$) obszaru ograniczonego kardioidą:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2 - x + y^2)^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

Wyniki: $\frac{3\pi}{2}$, $(\frac{5}{6}, 0)$, $\frac{35\pi}{16}$.

2. Wyznacz wartość całek

(a) $\iint_D xy \, dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$;

(b) $\iint_D \sqrt{4 + x^2 + y^2} \, dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2)\}$.

Wyniki: $\frac{1}{32}$, 4.

3. Wyznacz pole powierzchni odcinka spirali Archimedesesa

$$\{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbf{R}^2 : \varphi - 2\pi \leq r \leq \varphi, 0 \leq \varphi \leq \Phi\}.$$

Wynik: $\frac{1}{3}\Phi^3$ dla $\Phi \leq 2\pi$, $\frac{8\pi^3}{3} + \pi\Phi(\Phi - 2\pi)$ dla $\Phi \geq 2\pi$.

Spirala Archimedesesa to trajektoria ruchu mrówki oddalającej się od środka obracającej się płyty gramofonowej.

4. Zamień całkę $\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$ na całki iterowane na wszystkie możliwe sposoby, jeśli

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

5. Oblicz całkę potrójną

$$\iiint_D e^{x+y+z} \, dx dy dz, \quad \text{gdzie } D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}.$$

Wynik: $\frac{(e-1)^3}{6}$.

6. Stosując współrzędne sferyczne, wyznacz objętość bryły

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y^2 z^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2) \leq x^2 z^2, x \geq 0, z \geq 0\}.$$

Wynik: $\frac{5\sqrt{2}}{72}$.