

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

LISTA ZADAŃ NR 6

CAŁKI WIELOKROTNE

Rozgrzewka

1. Wykorzystaj dobrą pogodę i zagraj w rugby. W przerwie oblicz objętość piłki:

$$D = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

2. Gdyby jednak miało padać, oblicz zawczasu masę kropli deszczu:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - x^2 - y^2)^2 \leq 1\}.$$

Wskazówka: za każdym razem za pomocą sprytnej zamiany zmiennych typu $x = u$, $y = v$, $z = co(u, v, w)$ można sprowadzić problem do pytania o objętość kuli.

Ćwiczenia

1. *Współrzędne walcowe.* Wyznacz jacobian zamiany zmiennych $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = t$.

2. Stosując współrzędne walcowe, oblicz objętość bryły

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 - x(1 - z^2) + y^2)^2 \leq (1 - z^2)^2(x^2 + y^2), -1 \leq z \leq 1\}$$

3. *Objętość brył obrotowych.* Stosując współrzędne walcowe, wyraż objętość bryły obrotowej

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z), a \leq z \leq b\}$$

w postaci całki jednokrotnej. Zakładamy, że f jest ciągła i dodatnia na przedziale $[a, b]$.

4. Wykorzystaj uzyskany w poprzednim ćwiczeniu wzór do obliczenia objętości bryły

$$UFO = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \frac{1 - z^2}{1 + 64z^2} \right\}.$$

5. Stosując współrzędne sferyczne, oblicz objętość (nieograniczonej) bryły

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^3(x^2 + y^2) \leq z^2, z \geq 0\}$$

6. Oblicz (niewłaściwe) całki iterowane

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy.$$

Czy wobec tego całka podwójna $\iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ jest zbieżna bezwzględnie?

7. (a) Spróbuj wyznaczyć wartość (niewłaściwej) całki podwójnej

$$\iint_{(0,\infty) \times (0,\infty)} \frac{\sin(x+y) - (x+y) \cos(x+y)}{(x+y)^2} dx dy$$

zamieniając ją na całkę iterowaną. W obliczeniach pomocne mogą być tożsamości $(\frac{\sin t}{t})' = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$ oraz $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

- (b) W powyższej całce zamień zmienne zgodnie ze wzorami $x = u - v$, $y = v$. Wynikiem powinna być całka

$$\iint_{\Omega} \frac{\sin u - u \cos u}{u^2} du dv, \quad \Omega = \{(u, v) : u > 0, 0 < u < v\}.$$

Spróbuj wyznaczyć wartość tej całki całkując wpierw po v , a następnie po u .