Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 7

pochodne cząstkowe

Rozgrzewka

1. Uzasadnij, że jeśli $f(x_1, x_2)$ jest funkcją dwóch zmiennych o ciągłych pierwszych i drugich pochodnych cząstkowych, która spełnia warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_1, p_2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_1, p_2) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_1, p_2)\right)^2,$$

to f ma ekstremum lokalne w p_1, p_2. Jak rozpoznać, czy to maksimum, czy minimum?

Ćwiczenia

1. Oblicz drugie pochodne cząstkowe funkcji $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$.

2. Wyznacz $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}$, jeśli $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$.

3. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 - 6x_1 x_2 + x_2^3$.

4. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}(2x_1^2 + x_2^2)$.

5. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 (2 - x_1 - x_2)$ w trójkącie (z brzegiem) ograniczonym prostymi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 6$.

6. Znajdź wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 26x_2$ w kole danym nierównością $x_1^2 + x_2^2 \le 25$.

7. Wyznaczyć pochodne cząstkowe złożenia $g \circ f$, jeśli $g(x) = e^{-x^2}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ na dwa sposoby: wyznaczając złożenie i różniczkując oraz korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia.

8. (*Wersja formalna*) Niech $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2)$. Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x_1, x_2)$ wyznacz $\dfrac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_1}$ oraz $\dfrac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_2}$. Na tej podstawie wyraź $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2$ za pomocą $\dfrac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_1}$ i $\dfrac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_2}$.

   Odpowiedź: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(x_1, x_2))\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(x_1, x_2))\right)^2 = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right)^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)^2$

   (*Wersja zwyczajowa*) Niech $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ wyznacz $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ oraz $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$. Na tej podstawie wyraź $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ za pomocą $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$.

   Odpowiedź: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2$

9. Udowodnij twierdzenia Schwarza dla funkcji dwóch zmiennych $f(x_1, x_2)$: jeśli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ oraz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$ są ciągłe w (p_1, p_2), to $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_1, p_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p_1, p_2)$.

   Pierwszym krokiem jest uzasadnienie wzoru:

$$\iint\limits_{[a,b] \times [A,B]} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f(b, B) + f(a, A) - f(a, B) - f(A, b).$$

Mateusz Kwaśnicki