Analiza matematyczna 2

LISTA ZADAŃ NR 8

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Rozgrzewka

We własnym zakresie...

Ćwiczenia

1. Udowodnij twierdzenie o wartości średniej dla całek: jeśli na przedziale $[a, b]$ funkcja f jest ciągła, a g całkowalna i nieujemna, to istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Nieco mocniejsza wersja wymaga, aby $\xi \in (a, b)$.

2. Reszta we wzorze Taylora w postaci całkowej wyraża się wzorem

$$R_n(x, h) = \frac{1}{n!} \int_0^h f^{(n+1)}(x + s)(h - s)^n ds.$$

Udowodnij, że dla pewnych ξ, η zawartych między x i $x + h$ zachodzi

$$R_n(x, h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}}{(n + 1)!} \qquad \text{oraz} \qquad R_n(x, h) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)(h - \eta)^n h}{n!}.$$

Wskazówka: poprzednie zadanie.

3. Napisz wzór Taylora z pierwszą i drugą resztą dla funkcji $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$. Oblicz przybliżoną wartość $0,99^{0,99}$.

Wskazówka: $f(x_1, x_2) = e^{x_2 \ln x_1}$.

4. Napisz wzór Taylora z pierwszą i drugą resztą dla funkcji $f(x_1, x_2) = \frac{\cos x_1}{\cos x_2}$.

5. Znajdź $f'(1)$ oraz $f''(1)$ dla funkcji uwikłanej $y = f(x)$ danej równaniem

$$(x + y)^{-xy} = \frac{1}{2},$$

jeśli wiadomo, że $f(1) = 1$.

6. Znajdź $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(1)$ dla funkcji uwikłanej $y = f(x_1, x_2)$ danej równaniem

$$y^{x_1} + y^{x_2} = 18,$$

jeśli wiadomo, że $f(2, 2) = 3$.

Mateusz Kwaśnicki